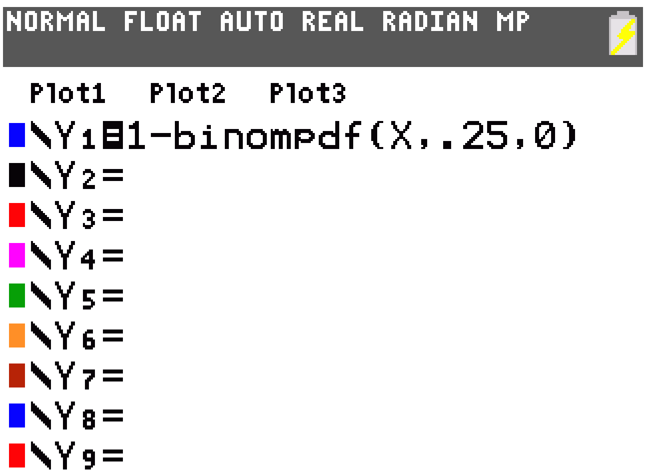
Stochastik: Länge einer Bernoulli-Kette

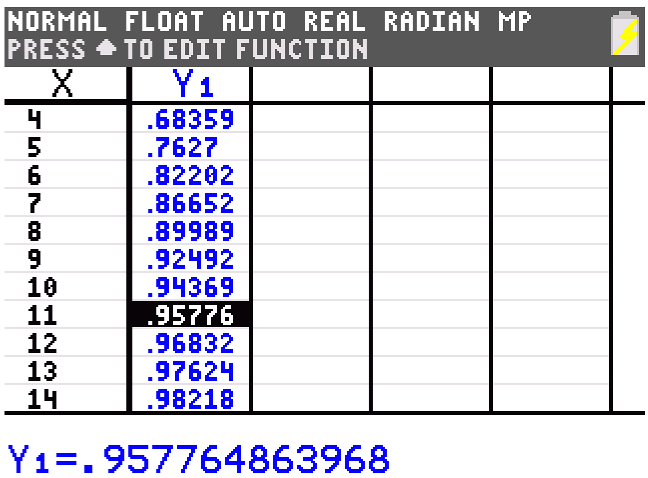
Die dreimal-mindestens-Aufgabe

Beispiel: Ein Glücksrad hat vier gleich große Sektoren, drei weiße und einen roten. Wie oft muss man das Glücksrad ***mindestens*** drehen, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von ***mindestens*** 95% ***mindestens*** einmal „rot“ auftreten soll?
n: Anzahl der Wiederholungen;
X: Häufigkeit des Auftretens von „rot“ bei n Wiederholungen
p = 0,25; q = 1 – p = 0,75.
Ansatz:
$P(X \geq 1) \geq 0{,}95$
$1 - P(X = 0) \geq 0{,}95$
Berechnung von P(X=0) bei n Spielen mit der Bernoullischen Formel:
$P(X = 0) = \binom{n}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^n = 0{,}75^n$
Es gibt genau einen Pfad, bei dem nur Misserfolge auftreten.

$1 - 0{,}75^n \geq 0{,}95 \quad | - 1$
$-0{,}75^n \geq -0{,}05 \quad | \cdot (-1)$
$0{,}75^n \leq 0{,}05$ (Relationszeichen umdrehen, da mit negativem Faktor multipliziert wurde)
$n \cdot \log(0{,}75) \leq \log(0{,}05)$
$n \geq \frac{\log(0{,}05)}{\log(0{,}75)}$ (Relationszeichen umdrehen, da durch log(0,75)<0 dividiert wurde)
$n \geq 10{,}413 \ldots$
Man muss also mindestens 11 mal spielen, damit mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit mindestens einmal „rot“ auftritt.

Vorgehen mit dem GTR:
Die Wahrscheinlichkeit, bei n Spielen keinen Treffer zu haben, also $P(X = 0)$,berechnet man mit binompdf(n,0.25,0).
$P(X \geq 1) \geq 0{,}95$
$1 - P(X = 0) \geq 0{,}95$
Die zweite Zeile gibt man in den y-Editor ein (s. Abb., aus n wird im GTR X) und sieht in der Tabelle nach, von welchem n an der Wert 0,95 erstmals erreicht wird.
Möchte man den Graphen von y1 zeichnen, muss man y_1 = 1-binompdf((round(X,0),.25,0) eingeben. Dann wird X auf 0 Nachkommastellen gerundet, es entsteht eine Treppenfunktion (Windoweinstellungen z.B. $0 \leq X \leq 15 \; und \; 0 \leq Y \leq 1.1$).





Hn 07/2014