

1. Häufige Fehler vermeiden

- Nicht durch x dividieren (die Lösung $x = 0$ geht dabei verloren), stattdessen ausklammern:
 $x^2 - 3x = 0$ / x ausklammern
 $x(x - 3) = 0$ / Ein Produkt ist Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist
 $x = 0$ oder $x - 3 = 0$
 $x = 0$ oder $x = 3$
- Bei der Multiplikation oder Division einer Gleichung muss jeder Summand multipliziert oder dividiert werden (manchmal wird auch die rechte Seite vergessen):
 $4x^2 - 8x = 12$ / : 4
 $x^2 - 2x = 3$ usw.
- Beim Auflösen von „Minusklammern“ muss jeder Summand in der Klammer mit dem Faktor vor der Klammer multipliziert werden, hier also mit -3 ; Minuszeichen nicht vergessen:
 $5x - 3(2x - 8) = 12$
 $5x - 3 * 2x - 3 * (-8) = 12$
 $5x - 6x + 24 = 12$ usw.

2. Lineare Gleichungen

Eine lineare Gleichung enthält nur x als Variable, nicht x^2 oder x^3 usw.

Lösungsstrategie:

- Jede Seite der Gleichung für sich so weit wie möglich zusammenfassen,
- so umformen, dass x nur noch auf einer Seite vorkommt,
- Summanden bei x auf beiden Seiten subtrahieren,
- durch Faktor vor x dividieren,
- Lösungsmenge aufschreiben.

Beispiel:

$$3(5x + 4) = 50 + 3x - 84 - 11x \quad / \text{ zusammenfassen}$$

$$15x + 12 = -34 - 8x \quad / x \text{ auf eine Seite bringen}$$

$$23x + 12 = -34 \quad / -12$$

$$23x = -46 \quad / : 23$$

$$x = -2$$

$$L = \{-2\}$$

Übungsaufgaben zu 2:

- $21x + 17 = 2x + 72 + 8x$
- $7x + 18 + 20x = 16x + 93 - 4x$
- $18 - (16 - x) = 1$
- $5(7x + 15) - 2(17x + 25) = 20$
- $14x - (8 + 3x) \cdot 5 = 0$

3. Quadratische Gleichungen

- Reinquadratische Gleichungen (nur x^2 , kein x als Variable)

Beispiel:

$$4x^2 = 36 \quad / : 4$$

$$x^2 = 9 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$x_1 = 3 ; x_2 = -3$$

$$L = \{-3 ; 3\}$$

Die Wurzel selbst ist stets größer oder gleich Null, die Gleichung hat aber auch die negative Lösung -3 .

- Gleichungen der Form $5x^2 + 3x = 0$ (wichtig: rechte Seite Null, keine andere Zahl)

$$5x^2 + 10x = 0 \quad / x \text{ ausklammern, nicht durch } x \text{ teilen (siehe Abschnitt 1)}$$

$$x(5x + 10) = 0 \quad / 1. \text{ Faktor Null oder } 2. \text{ Faktor Null}$$

$$x = 0 \text{ oder } 5x + 10 = 0 \quad / -10, \text{ danach } :5$$

$$x = 0 \text{ oder } x = -2; \quad L = \{-2 ; 0\}$$

c. Gemischt-quadratische Gleichungen

Strategie:

i) Normalform $x^2 + px + q = 0$ herstellen, deshalb ggf. durch Faktor vor x^2 dividieren,

ii) p-q-Formel anwenden:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1/2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel:

$$3x^2 + 36x - 84 = 0 \quad / : 3$$

$$x^2 + 12x - 28 = 0$$

$$x_{1/2} = -6 \pm \sqrt{36 - (-28)}$$

$$x_{1/2} = -6 \pm \sqrt{64}$$

$$x_{1/2} = -6 \pm 8$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -14$$

$$L = \{-14; 2\}$$

Der Term unter der Wurzel (Diskriminante) kann auch Null oder negativ sein, in diesem Fall gibt es nur eine oder gar keine Lösung der Gleichung:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x^2 - 6x + 10 = 0$$

$$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9-9}$$

$$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9-10}$$

$$x_{1/2} = 3 \pm 0$$

$$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{-1}$$

$$x = 3$$

$$L = \{\}$$

$$L = \{3\}$$

iii) Alternative zur p-q-Formel: Quadratische Ergänzung:

$x^2 + 12x - 28 = 0$ /Zahl vor x halbieren, quadrieren und auf beiden Seiten addieren

$$/+ (12/2)^2$$

$$x^2 + 12x + 6^2 = 28 + 6^2$$

$$(x+6)^2 = 64 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$x+6 = 8 \vee x+6 = -8$$

$$x = 2 \vee x = -14$$

$$L = \{-14; 2\}$$

Übungsaufgaben zu 3:

3. a) $x^2 = 81$ b) $x^2 = 19$ c) $x^2 = -25$ d) $x^2 = \frac{196}{81}$

e) $x^2 + 5x = 0$ f) $x(x-8) = 0$ g) $x^2 + 2x - 63 = 0$

h) $x^2 + 6x = 91$ i) $x^2 - 4x + 20 = 0$ k) $3x^2 - 22x + 35 = 0$

4. Gleichungen 3. und höheren Grades

x ausklammern, wenn möglich, sonst mit GTR lösen.

$$4x^3 + 8x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(4x^2 + 8x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } 4x^2 + 8x - 5 = 0$$

Die quadratische Gleichung wie unter 3c beschrieben lösen; insgesamt ergibt sich

$$x_1 = 0; x_2 = -2,5; x_3 = 0,5$$

Hinweis: Eine Gleichung kann höchstens so viele Lösungen wie die höchste Potenz von x haben.

$$4x^3 + 8x^2 - 5x - 6 = 0$$

GTR, linke Seite bei y_1 eingeben, da rechte Seite Null ist, Graph aufrufen und mit ZERO

Nullstellen berechnen, Grenzen (bound) links und rechts von der jeweiligen Nullstelle eingeben,

Lösungen sind

$$x_1 \approx -2,259; x_2 \approx -0,695; x_3 \approx 0,955.$$

Übungsaufgaben zu 4:

a) $x^3 + x^2 - 56x = 0$ b) $2x^3 - 18x^2 = 20x$

c) mit GTR: $x^3 - 19x + 30 = 0$

5. Wurzelgleichungen

Bei Wurzelgleichungen muss man die Wurzel auf einer Seite allein stehen haben (isolieren) und dann die ganze Gleichung quadrieren. Dabei können Lösungen dazukommen, deshalb gehört hier eine Probe zum Löseverfahren und dient nicht nur der Kontrolle!

Beispiel:

$$5 - 3\sqrt{2x-1} = 2 \quad /-5$$

$$-3\sqrt{2x-1} = -3 \quad /: -3$$

$$\sqrt{2x-1} = 1 \quad /(\)^2$$

$$2x-1 = 1^2 \quad /+1$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Probe: $5 - 3\sqrt{2 \cdot 1 - 1} = 2$ stimmt! Nun kann man die Lösungsmenge aufschreiben:

$$L = \{1\}$$

Wichtig: Die Probe muss immer in der Ausgangsgleichung durchgeführt werden!

Mit GTR:

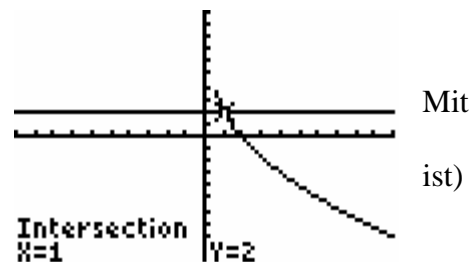
$$y_1 = 5 - 3\sqrt{2x-1}$$

$$y_2 = 2$$

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=5-3√(2X-1)
\Y2=2
\Y3=
```

Eventuell bei TABLE nachsehen, für welche x die y-Werte sich annähern, WINDOW entsprechend einstellen. Bei diesem Beispiel reicht ZOOM STANDARD.

INTERSECT (Cursor muss im Bereich $x > 0$ sein, sonst klappt es nicht, weil die Wurzelfunktion im negativen Bereich nicht definiert) und entsprechenden BOUNDaries ermittelt man die Lösung.



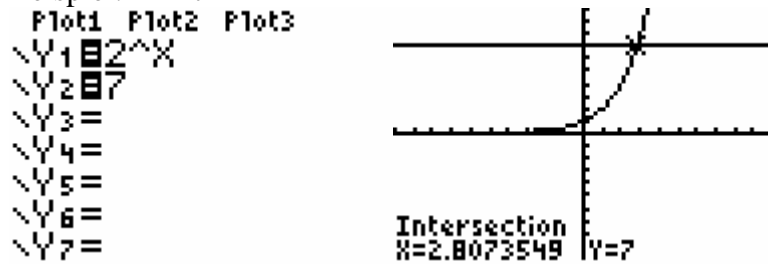
Übungsaufgabe zu 5 (GTR):

$$x + \sqrt{5x-1} = 5$$

6. Exponentialgleichungen

GTR: Beide Seiten in y-Editor eingeben, TABLE betrachten und WINDOW einstellen, INTERSECT

Beispiel: $2^x = 7$



Der x-Wert ist Lösung der gegebenen Gleichung:

$$L = \{2,807\}$$

Algebraisch berechnet man das mit dem Logarithmus:

$$2^x = 7 \quad / \log_{10}$$

$$x \cdot \log_{10} 2 = \log_{10} 7 \quad / \log_{10} 2$$

$$x = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2}$$

$$2. a) \quad 21x + 17 = 2x + 72 + 8x \quad / \text{zusammenfassen}$$

$$21x + 17 = 10x + 72 \quad | -10x$$

$$11x + 17 = 72 \quad | -17$$

$$11x = 55 \quad | :11$$

$$x = 5 \quad L = \{5\}$$

$$b) \quad 7x + 18 + 20x = 16x + 93 - 4x \quad / \text{zusammenfassen}$$

$$27x + 18 = 12x + 93 \quad | -12x$$

$$15x + 18 = 93 \quad | -18$$

$$15x = 75 \quad | :15$$

$$x = 5 \quad L = \{5\}$$

$$c) \quad 18 - (16 - x) = 1 \quad / \text{Klammer auflösen}$$

$$18 - 16 + x = 1 \quad / \text{zusammenfassen}$$

$$2 + x = 1 \quad | -2$$

$$x = -1 \quad L = \{-1\}$$

$$d) \quad 5(7x + 15) - 2(17x + 25) = 20 \quad / \text{Klammern auflösen}$$

$$35x + 75 - 34x - 50 = 20 \quad / \text{zusammenfassen}$$

$$x + 25 = 20 \quad | -25$$

$$x = -5$$

$$L = \{-5\}$$

$$e) \quad 14x - (8 + 3x) \cdot 5 = 0 \quad / \text{Zahl darf vor der Klammer stehen}$$

$$14x - 5(8 + 3x) = 0$$

$$14x - 40 - 15x = 0$$

$$-x - 40 = 0 \quad | +40$$

$$-x = 40 \quad | \cdot (-1)$$

$$x = -40$$

$$L = \{-40\}$$

$$3. a) \quad x^2 = 81$$

$$x_1 = 9; x_2 = -9 \quad L = \{-9; 9\}$$

$$b) \quad x^2 = 19$$

$$x_1 = \sqrt{19} \approx 4,359; x_2 = -\sqrt{19} \approx -4,359 \quad L = \{-\sqrt{19}; \sqrt{19}\}$$

$$c) \quad x^2 = -25 \quad L = \{\}$$

$$d) \quad x^2 = \frac{196}{81}$$

$$x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{196}{81}} = \pm \frac{\sqrt{196}}{\sqrt{81}} = \pm \frac{14}{9}$$

$$x_1 = \frac{14}{9}; x_2 = -\frac{14}{9} \quad L = \left\{ -\frac{14}{9}; \frac{14}{9} \right\}$$

3. e) $x^2 + 5x = 0$ / x ausklammern
 $x(x+5) = 0$ / erste oder zweite Term Null
 $x_1 = 0$; $x_2 + 5 = 0$ / -5
 $x_1 = 0$; $x_2 = -5$ $L = \{-5; 0\}$

f) $x(x-8) = 0$
 $x_1 = 0$; $x_2 - 8 = 0$ / $+8$
 $x_1 = 0$; $x_2 = 8$ $L = \{0; 8\}$

g) $x^2 + 2x - 63 = 0$
 $x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1 - (-63)}$
 $x_{1/2} = -1 \pm 8$
 $x_1 = -9$; $x_2 = 7$ $L = \{-9; 7\}$

h) $x^2 + 6x = 91$
 $x^2 + 6x - 91 = 0$
 $x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9 - (-91)}$
 $x_{1/2} = -3 \pm 10$
 $x_1 = -13$; $x_2 = 7$ $L = \{-13; 7\}$

i) $x^2 - 4x + 20 = 0$
 $x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 - 20}$
 $x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{-16}$
 $\sqrt{-16}$ nicht definiert, $L = \{\}$

k) $3x^2 - 22x + 35 = 0$ / $:3$
 $x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{35}{3} = 0$
 $x_{1/2} = \frac{11}{3} \pm \sqrt{\frac{121}{9} - \frac{35}{3}}$
 $x_{1/2} = \frac{11}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}}$
 $x_{1/2} = \frac{11}{3} \pm \frac{4}{3}$
 $x_1 = \frac{15}{3} = 5$; $x_2 = \frac{7}{3}$ $L = \{\frac{7}{3}; 5\}$

$$4. a) \quad x^3 + x^2 - 56x = 0 \quad | x \text{ ausklammern}$$

$$x(x^2 + x - 56) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 + x - 56 = 0$$

$$x_{2/3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (-56)}$$

$$x_{2/3} = -\frac{1}{2} \pm 7,5$$

$$x_2 = -8; \quad x_3 = 7$$

$$L = \{-8; 0; 7\}$$

$$b) \quad 2x^3 - 18x^2 = 20x \quad | -20x$$

$$2x^3 - 18x^2 - 20x = 0 \quad | x \text{ ausklammern}$$

$$x(2x^2 - 18x - 20) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad 2x^2 - 18x - 20 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 - 9x - 10 = 0$$

$$x_{2/3} = 4,5 \pm \sqrt{4,5^2 - (-10)}$$

$$x_{2/3} = 4,5 \pm \sqrt{30,25}$$

$$x_{2/3} = 4,5 \pm 5,5$$

$$x_2 = -1; \quad x_3 = 10$$

$$L = \{-1; 0; 10\}$$

$$c) \quad y_1 = x^3 - 19x + 30$$

GRAPH, ZERO, bound richtig eingeben

$$x_1 = -5; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3 \quad L = \{-5; 2; 3\}$$

$$5. \quad y_1 = x + \sqrt{5x-1}$$

$$y_2 = 5$$

Ansatz in positiven x -Bereich bewegen.

$$\text{INTERSECT} \rightarrow x = 2$$