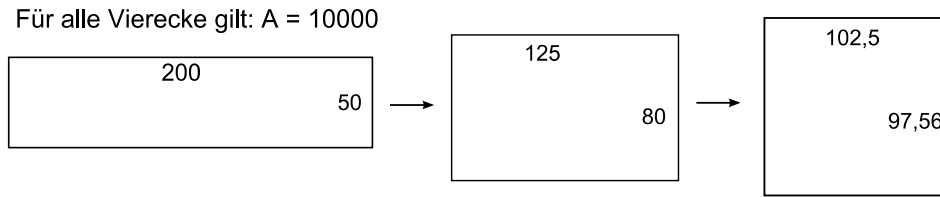


### Das Heron-Verfahren zur Berechnung von Wurzeln

Das Heron-Verfahren kann man dadurch veranschaulichen, dass ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b „immer mehr“ einem Quadrat angenähert wird:



Beispiel: Gesucht ist die Wurzel aus 20.

Startwert:  $a = 1$  (immer möglich, schneller geht es hier mit  $a = 5$ , da 5 dichter an  $\sqrt{20}$  liegt)

→  $b = 20 : a$ , also  $b = 20$  (denn  $a * b = 20$ , also ist  $b = 20 : a$ ).

Das erste Rechteck hat also die Seitenlängen 1 und 20.

Erste Näherung: Man bildet den Mittelwert der Seitenlängen a und b:  $\frac{a+b}{2} = \frac{1+20}{2} = 10,5$ .

Dieser Wert wird als neue Seitenlänge a gewählt:  $a = 10,5$ .

Jetzt geht es immer genauso weiter wie oben:

→  $b = 20 : a = 20 : 10,5 = \frac{40}{21} \approx 1,90476$ .

Man bildet den Mittelwert der Seitenlängen a und b:  $\frac{a+b}{2} = \frac{10,5+1,90476}{2} = 6,20238$ .

Dieser Wert ist zugleich das neue a....

a	b = 20 : a	$\frac{a+b}{2}$
1	20	10,5
10,5	1,90476	6,20238
6,20238	3,22457	4,713475
4,713475	...	...

Der Mittelwert aus der 3. Spalte wird immer als neues a in die nächste Zeile vorn übertragen.

Man sieht, dass schnell Dezimalzahlen mit vielen Nachkommastellen entstehen, die die Eingabe sehr mühsam machen. Mit dem GTR geht die Berechnung ganz schnell, wenn man die Speicher nutzt. Zunächst speichert man den Radikanden (also die Zahl, aus der die Wurzel berechnet werden soll), z.B. im Speicher Z.

Buchstaben mit **[ALPHA]** eingeben, → mit **[STO▶]**

Eingabe: 20 → Z

Anschließend werden die Werte a und b gespeichert (s. Bild 1):

1 → A **[ENTER]**

Z / A → B **[ENTER]**

Jetzt den Durchschnitt bilden und wieder in A speichern:

( A + B ) / 2 → A **[ENTER]**

Die folgende Tastenfolge muss jetzt dauernd wiederholt werden:

**[2nd][ENTER]** **[2nd][ENTER]** **[ENTER]**

Damit werden die Befehle (A+B)/2→A und Z/A→B abwechselnd ausgeführt und die Näherung wird immer genauer. Nach 5maliger Wiederholung der beiden Befehle stimmt die Näherung mit dem Taschenrechnerwert für  $\sqrt{20}$  überein!

20→Z	
1→A	20
Z/A→B	1
	20

(A+B)/2→A	10.5
Z/A→B	1.904761905
(A+B)/2→A	6.202380952
(A+B)/2→A	4.713474545
Z/A→B	4.243154346

Die beiden Eingaben

$Z/A \rightarrow B$  und

$(A + B) / 2 \rightarrow A$

lassen sich zu einem Befehl zusammenfassen, dazu schreibt man im zweiten Befehl einfach statt B den Ausdruck Z/A:

$(A + Z/A) / 2 \rightarrow A$

Wenn man jetzt noch mal den Speicherplatz A auf 1 setzt mit  $1 \rightarrow A$  [ENTER], braucht man nur noch die oben dargestellte Zeile  $(A + Z/A) / 2 \rightarrow A$  [ENTER] einzugeben und kann diesen Befehl durch mehrfaches Drücken von [ENTER] immer wieder wiederholen. Mit jedem [ENTER] verbessert sich die Näherung, bis nach 5-6 Schritten keine Veränderung mehr zu erkennen ist.

```

1→A
(A+Z/A)/2→A
10.5
6.202380952
4.713474545
4.478314445

```

Damit wurde eine Folge von Werten für a berechnet, bei der das neue a jeweils aus dem vorherigen ermittelt wurde. Man sagt, die Werte  $a_1, a_2, a_3$  usw. bilden eine (rekursive) Folge.

Um eine andere Wurzel zu berechnen, muss nur der Radikand in Z eingegeben und dann die Befehlszeile  $(A + Z/A) / 2 \rightarrow A$  [ENTER] wiederholt werden.

### Berechnung mit Hilfe einer rekursiven Folge

Solche Folgen kann der TI84+ auch direkt berechnen.

Dazu wird zunächst der Modus für Folgen eingeschaltet im MODE-Bildschirm (4. Zeile „seq“ aktivieren).

```

NORMAL SCI ENG
FLOAT 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
RADIAN DEGREE
FUNC PAR POL SEQ
CONNECTED DOT
SEQUENTIAL SIMUL

```

Dadurch hat sich das Erscheinungsbild des [Y=]-Editors verändert. Eingabe von n: Taste [X,T,θ,n] (2. Reihe, 2. Taste), Eingabe von u: [2nd] 7

```

Plot1 Plot2 Plot3
nMin=1
u(n)=
u(nMin)=
u(n)=

```

Nun wird in der dritten Zeile die Formel für u(n) eingegeben.

Bisher galt:  $(A + Z/A) / 2 \rightarrow A$ . IN Worten:

(altes A + Z / altes A) / 2 ergibt neues A

Ersetzt man „altes A“ durch u(n-1) und „neues A“ durch u(n), so lautet die Formel:

$(u(n-1)+Z/u(n-1))/2$ . Dieser Term wird u(n) zugewiesen. Also gibt man ihn in der dritten Zeile ein (Klammer wie im Bild sorgfältig eingeben, erste Klammer nicht vergessen!).

In der vierten Zeile muss noch der Startwert für a, also  $u(nMin)=1$ , eingegeben werden.

```

Plot1 Plot2 Plot3
nMin=1
u(n)=(u(n-1)+Z/
u(n-1))/2
u(nMin)=1
u(n)=
u(nMin)=
u(n)=

```

Lässt man sich jetzt mit [2nd] F5, also TABLE, die Wertetabelle anzeigen, wird die Folge von Näherungswerten angezeigt.

(Sie beginnt bei n=1, daher ERR: für n=0.)

Wenn man mit dem Cursor auf die rechte Spalte u(n) geht, erscheint der zugehörige Wert in der unteren Zeile mit voller Genauigkeit.

n	u(n)
0	ERR:
1	1
2	10.5
3	6.2024
4	4.7135
5	4.4783
6	4.4721

u(n)=4.472140217

Für eine neue Berechnung braucht nur ein neuer Radikand in den Speicher Z eingegeben zu werden.

Mit einem Tabellenkalkulationsprogramm (z.B. Excel) kann man die Berechnungen noch besser nachverfolgen. Eingabe:

	A	B	C	D
1	<b>Wurzelberechnung nach Heron</b>			
2		Berechne die Wurzel aus		20
3	Anzahl	a	b	(a+b)/2
4	1	1	=D\$2/B4	=(B4+C4)/2
5	2	=D4		
6				

Zu beachten ist die Eingabe in C4 mit \$-Zeichen, dadurch wird ein absoluter Bezug auf die Zelle D2 hergestellt, die den Radikanden enthält. Beim Kopieren der Zellen bleibt der Bezug erhalten.

	A	B	C	D
1	<b>Wurzelberechnung nach Heron</b>			
2		Berechne die Wurzel aus		20
3	Anzahl	a	b	(a+b)/2
4	1	1	20	10,5
5	2	10,5		
6				

Jetzt markiert man die Zellen C4 und D4 und zieht am kleinen Kästchen rechts unten:

	A	B	C	D
1	<b>Wurzelberechnung nach Heron</b>			
2		Berechne die Wurzel aus		20
3	Anzahl	a	b	(a+b)/2
4	1	1	20	10,5
5	2	10,5	1,9047619	6,20238095

	A	B	C	D
1	<b>Wurzelberechnung nach Heron</b>			
2		Berechne die Wurzel aus		20
3	Anzahl	a	b	(a+b)/2
4	1	1	20	10,5
5	2	10,5	1,9047619	6,20238095
6				
7				
8				
9				
10				
11				

Schließlich wird die ganze Zeile 5 markiert (Zellen A5 bis D5) und wieder am Kästchen rechts unten gezogen:

... und nach dem Loslassen stehen die Näherungen in der Tabelle (Spalte D):

	A	B	C	D
1	<b>Wurzelberechnung nach Heron</b>			
2		Berechne die Wurzel aus		20
3	Anzahl	a	b	(a+b)/2
4	1	1	20	10,5
5	2	10,5	1,9047619	6,20238095
6	3	6,20238095	3,22456814	4,71347455
7	4	4,71347455	4,24315435	4,47831445
8	5	4,47831445	4,46596599	4,47214022
9	6	4,47214022	4,47213169	4,47213596
10	7	4,47213596	4,47213595	4,47213595
11				

Um die Wurzel aus einer anderen Zahl zu ziehen, braucht man nur noch den Wert in Zelle D2 zu ändern (z. B. auf 5), die Tabelle passt sich automatisch an!

Wurzelberechnung nach Heron

	A	B	C	D
		Berechne die Wurzel aus		5
Anzahl	a	b	(a+b)/2	
1	1	1	5	3
2	2	3	1,66666667	2,33333333
3	3	2,33333333	2,14285714	2,23809524
4	4	2,23809524	2,23404255	2,2360689