# Kurvenuntersuchung (algebraisch und mit dem TI 84 plus)

Hn 8/2013

Mit **Stelle** ist x gemeint, y oder f(x) ist der zugehörige **Wert**.
Man unterscheidet die Funktion (gegeben durch die Funktionsgleichung) und ihren Graphen (Schaubild).

## Symmetrien:

$f(-x) = f(x)$ → Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse
$f(-x) = -f(x)$ → Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung
Falls beides nicht erfüllt ist: Es liegt keine der besonderen Symmetrien vor.

Bei ganzrationalen Funktionen:
x hat nur gerade Exponenten ($x^2$, $x^4$, $x^6$; $x^0$ =1 gilt als gerade): Achsensymmetrie zur y-Achse
x hat nur ungerade Exponenten ($x^5$, $x^3$, x): Punktsymmetrie zum Ursprung

**Definitionsmenge:** Alle Stellen x, für die $f$ nicht definiert ist (weil z.B. durch Null dividiert würde), gehören nicht zur Definitionsmenge. So hat z.B. $f(x) = \sqrt{x}$ die Definitionsmenge
$\boldsymbol{D} = \{x \epsilon \boldsymbol{R} | x \geq 0\}$ (***D*** ist die Menge aller reellen Zahlen, die größer oder gleich Null sind).

**Nullstellen:** $f(x) = 0$ setzen und x berechnen
Wenn möglich, x ausklammern und den Satz: ***„Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist“*** anwenden, bei quadratischen Gleichungen p-q-Formel benutzen:

Für die Normalform $x^2 + p \cdot x + q = 0$ gilt: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.
*Eine ganzrationale Funktion hat höchstens so viele Nullstellen wie ihr Grad.*

**Erste bis dritte Ableitung** bilden, um Extrempunkte und Wendepunkte zu berechnen.
Die ***erste Ableitung*** gibt die ***Steigung*** des Graphen von f an:
$f' > 0$: f steigt, $f' < 0$: f fällt, $f' = 0$: f hat waagerechte Tangente,
die ***zweite Ableitung*** die ***Krümmung*** ($f'' > 0$: f ist linksgekrümmt, $f'' < 0$: f rechtsgekrümmt)

## Extrempunkte:

1. <u>Notwendige Bedingung:</u> Mögliche Extremstellen $x_E$ liegen dort vor, wo $f'(x) = 0$ ist, also: Nullstellen von $f'$ berechnen!
2. a) <u>Hinreichende Bedingung</u> überprüfen (es gilt weiterhin $f'(x_E) = 0$), <u>Möglichkeit 1</u>:
   $f''(x_E) < 0$ → Bei $x_E$ ist ein Hochpunkt,
   $f''(x_E) > 0$ → Bei $x_E$ ist ein Tiefpunkt,
   $f''(x_E) = 0$→ keine Aussage möglich, aber wenn $f'''(x_E) \neq 0$ ist, liegt ein Sattelpunkt vor (=Wendepunkt mit waagerechter Tangente, s. unter Wendepunkte).
   b) <u>Hinreichende Bedingung</u> überprüfen (es gilt weiterhin $f'(x_E) = 0$), <u>Möglichkeit 2</u>:
   Mit Teststellen prüfen, ob die Nullstelle bei $f'$ einen Vorzeichenwechsel hat.
   Bsp.: $x_E = 2$, also $f'(2) = 0$; Teststellen 1,9 und 2,1; $f'(1{,}9) < 0$; $f'(2{,}1) > 0$→ $f'$ hat VZ-Wechsel von – nach +, also ist f erst gefallen und dann gestiegen, somit liegt bei $\boldsymbol{x_E}$ ein Tiefpunkt vor.
3. <u>y-Wert</u> des gefundenen Extrempunktes berechnen, dazu $x_E$ in die Ausgangsgleichung $f(x)$ einsetzen,
   Punkte in der Form H (-3 | 8 ) oder T ( 2 | -5 ) angeben.

## Wendepunkte:

Wendestellen sind Extremstellen der ersten Ableitung, daher gilt Ähnliches wie bei Extremstellen, allerdings eine Ableitung höher:
<u>notwendig</u>: $f''(x_W) = 0$; <u>hinreichend</u>: zusätzlich $f'''(x_W) \neq 0$ bzw. $f''$ hat VZ-Wechsel bei $x_W$ .
<u>y-Wert</u>: mit der Funktionsgleichung $f(x_W)$ berechnen, dann W angeben: $W(x_W | f(x_W))$.

**Sattelpunkte (**Wendepunkt mit waagerechter Tangente)**:**
Wenn für eine Stelle $x_0$ gilt: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann hat f bei $x_0$ einen ***Sattelpunkt S*** ($x_0$ | $f(x_0)$ ).

## Verhalten im Unendlichen (bei ganzrationalen Funktionen):

Die höchste Potenz von x setzt sich durch, man betrachtet nur diesen Summanden.

Beispiel: Für $x \to \pm\infty$ strebt $f(x) = \boldsymbol{-2x^4} + 5x^3 - 3x$ gegen $g(x) = \boldsymbol{-2x^4}$. Damit ist

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \,; \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

**Wertemenge:** gibt an, welche Zahlen als y-Werte vorkommen. Beispiel: $f(x) = x^2 - 2$ ist eine um 2 Einheiten nach unten verschobene Normalparabel, also sind alle y-Werte größer oder gleich -2: $\boldsymbol{W} = \{y \epsilon \boldsymbol{R} | y \geq -2\}$.

**Zeichnung:** Achsen mit x und y beschriften, Pfeile an die Achsen zeichnen (nur rechts und oben), an jeder Achse einmal die Einheit 1 markieren (meist 1 cm), alle berechneten besonderen Punkte einzeichnen, ggf. aus der Wertetabelle (***table***) weitere Punkte für die Zeichnung entnehmen, Graph zeichnen.

## Kurvenuntersuchung mit dem GTR

- $f(x)$ bei y1 eingeben,
- 1. Ableitung mit ***nDeriv*** (ALPHA WINDOW 3 oder MATH 8) bei y2 erzeugen: $y2 = \frac{d}{dX}(\boldsymbol{Y1})|_{X=X}$
- Graph anzeigen lassen (sollte nichts dargestellt werden, mit Wertetabelle nachsehen, welche y-Werte vorkommen, und WINDOW anpassen),
- Nullstellen mit ***zero*** berechnen (Nullstellen, die die x-Achse nur berühren, werden ggf. nicht gefunden, dann mit ***min*** oder ***max*** arbeiten),
- Extrempunkte mit ***min*** oder ***max*** *bestimmen*,
- Wendestellen sind Extremstellen der 1. Ableitung, also mit ***min*** oder ***max*** bei y2 bestimmen, den zugehörigen y-Wert des WP wieder mit y1 berechnen (mit Pfeil nach oben auf y1 wechseln, ggf. ***trace*** drücken und Wendestelle = Extremstelle von f ʼ noch mal eintippen, falls sich x verändert hat).

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ . Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung. $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{R}.$

Nullstellen: $\frac{1}{4}x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{4}x^2 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\vee\; \frac{1}{4}x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\vee x = \pm\sqrt{12}.$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3; f''(x) = \frac{3}{2}x;\; f'''(x) = \frac{3}{2}$

Extrempunkte: notwendig: $f'(x) = 0$

$\frac{3}{4}x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$ . Überprüfen einer hinreichenden Bedingung:

$f''(2) = 3 > 0,$ also Tiefpunkt T(2|-4).

Aus Symmetriegründen gibt es einen Hochpunkt H(-2|4).

Wendepunkte: notwendig: $f''(x) = 0. \frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Überprüfen einer hinreichenden Bedingung:

$f'''(x) = \frac{3}{2} \neq 0$, also Wendepunkt W(0|0).

Für $x \to \pm\infty$ nähert sich der Graph dem von $g(x) = \frac{1}{4}x^3$, daher gilt

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \,;\; \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Wertemenge: **W** = **R**