## Kurvenuntersuchung algebraisch



**Symmetrien:**
f(-x) = f(x) → Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse
f(-x) = -f(x) → Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung
**Bei ganzrationalen Funktionen:**
x hat nur gerade Exponenten ($x^2$, $x^4$, $x^6$; $x^0$ =1 gilt als gerade): Achsensymmetrie zur y-Achse
x hat nur ungerade Exponenten ($x^5$, $x^3$, x): Punktsymmetrie zum Ursprung

**Nullstellen:**
f(x)=0 setzen und x berechnen, wenn möglich, x ausklammern und den Satz: ***„Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist“*** anwenden, wenn nötig, p-q-Formel bei quadratischen Gleichungen benutzen: $x^2 + p \cdot x + q = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ oder mit quadratischer Ergänzung arbeiten.
**Erste bis dritte Ableitung** bilden, um Extrempunkte und Wendepunkte zu berechnen.
Die erste Ableitung gibt die Steigung des Graphen von f an (f'>0: f steigt, f'<0: f fällt, f'=0: f hat waagerechte Tangente), die zweite Ableitung die Krümmung (f''>0: f linksgekrümmt, f''<0: f rechtsgekrümmt)

**Extrempunkte:**
1. Mögliche Extremstellen $x_E$ liegen dort vor, wo f '(x) = 0 ist (notwendige Bedingung), also: Nullstellen von f ' berechnen!
2. a) Hinreichende Bedingung überprüfen, Möglichkeit 1:
   f ''($x_E$) < 0 → Bei $x_E$ ist ein Hochpunkt
   f ''($x_E$) > 0 → Bei $x_E$ ist ein Tiefpunkt
   f ''($x_E$) = 0 → keine Aussage möglich, aber wenn f ''' an der Stelle $x_E$ $\neq$ 0 ist, liegt ein Sattelpunkt (=Wendepunkt mit waagerechter Tangente, s. unter Wendepunkte) vor.
   b) Hinreichende Bedingung überprüfen, Möglichkeit 2:
   Mit Teststellen prüfen, ob die Nullstelle bei f ' einen Vorzeichenwechsel hat.
   Bsp.: $x_E$ = 2, also f '(2)=0; Teststellen 1,9 und 2,1; f '(1,9) < 0; f '(2,1) > 0 → f ' hat VZ-Wechsel von – nach +, also ist f erst gefallen und dann gestiegen, somit liegt bei $x_E$ ein Tiefpunkt vor.
3. y-Wert des gefundenen Extrempunktes berechnen, dazu $x_E$ in die Ausgangsgleichung f(x) einsetzen, Punkte in der Form H (-3 | 8 ) oder T ( 2 | -5 ) angeben.

**Wendepunkte:**
Wendestellen sind Extremstellen der ersten Ableitung, daher gilt Ähnliches wie bei Extremstellen, allerdings eine Ableitung höher:

notwendig: f ''($x_W$) = 0; hinreichend: f ''' ($x_W$) $\neq$ 0 bzw. f '' hat VZ-Wechsel bei $x_W$ .
y-Wert wieder mit der Funktionsgleichung f berechnen, dann W angeben: W ($x_W$ | f($x_W$) )

Wenn für eine Stelle $x_0$ gilt: f '($x_0$) = 0 und f ''($x_0$) = 0 und f '''($x_0$) $\neq$ 0 , dann hat f bei $x_0$ einen ***Sattelpunkt S*** ( $x_0$ | f($x_0$) ).

## Kurvenuntersuchung mit dem GTR

f(x) bei y1 eingeben, 1. Ableitung mit *nDeriv* bei y2 erzeugen: y2 = $\frac{d}{dX}(Y1)|_{X=X}$
Graph anzeigen lassen, Nullstellen mit zero berechnen (die x-Achse nur berührende Nullstellen werden ggf nicht gefunden, dann mit min oder max arbeiten), Extrempunkte mit min oder max,
Wendestellen sind Extremstellen der 1. Ableitung, also mit min oder max bei y2 bestimmen, Vorsicht: zugehörigen y-Wert des WP wieder mit y1 berechnen (mit Pfeil nach oben auf y1 wechseln, ggf. Trace drücken und Wendestelle = Extremstelle von f ' noch mal eintippen).
**Zeichnung:** Berechnete Punkte in ein Koordinatensystem einzeichnen, Achsen mit x und y beschriften, Pfeile an die Achsen (nur rechts und oben), an jeder Achse einmal Einheit 1 markieren (meist 1 cm), ggf. aus Wertetabelle (GTR: table) weitere Punkte für die Zeichnung entnehmen, Graph zeichnen.