Lösen linearer Gleichungssysteme

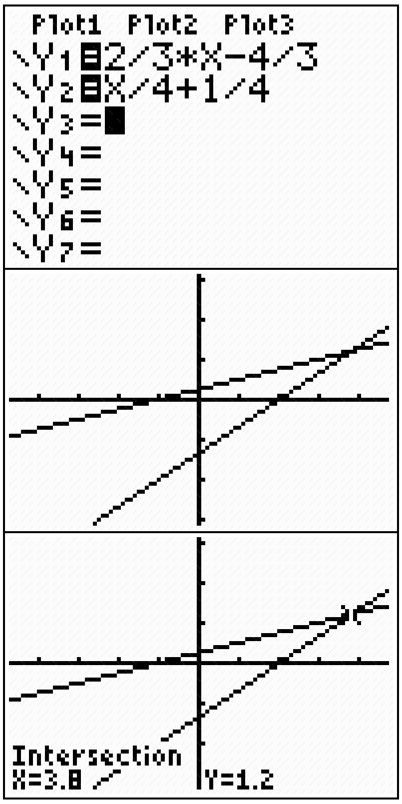
Ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten Größen x und y, wie z.B.
$\left|\begin{array}{l} 2x-3y=4 \\ -x+4y=1 \end{array}\right|$ heißt **lineares Gleichungssystem (LGS)**.
Wenn es genau eine Lösung gibt (s. unten), so besteht sie nicht aus einer Zahl, sondern aus einem Zahlenpaar (x und y). Schreibweise: $IL=\{(x\,|\,y)\}$, Reihenfolge beachten!

1. Graphisches Lösungsverfahren (mit GTR)

a) Zuerst werden beide Gleichungen des LGS schrittweise nach y aufgelöst:

$$\left|\begin{array}{l} y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3} \\ y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4} \end{array}\right|$$

Es ergeben sich zwei lineare Funktionen, die je eine Gerade als Graph haben.



b) Beide Funktionen werden im Y=Editor in den GTR eingegeben.

c) Mit GRAPH lassen sich beide Geraden graphisch darstellen. Eventuell muss mit ZOOM oder WINDOW ein geeignetes Graphikfenster erzeugt werden, so dass der Schnittpunkt beider Geraden deutlich sichtbar ist.

d) Mit CALC / INTERSECT lässt sich nun der Schnittpunkt der beiden Geraden ablesen:
$S(3{,}8/1{,}2)$
Die Lösungsmenge des LGS lautet daher:
$IL=\{(3{,}8/1{,}2)\}$

e) Übungen: Löse graphisch!

$\left|\begin{array}{l} y=2x-1 \\ x+2y=-8 \end{array}\right|$

i) $\left|\begin{array}{l} 3x-y=8 \\ 2x+2y=0 \end{array}\right|$

ii) $\left|\begin{array}{l} 2x+y=-8 \\ x+3y=26 \end{array}\right|$ Hier muss ein geeignetes Fenster gesucht werden!

iii) $\left|\begin{array}{l} 7x-11y=25 \\ 9x+14y=1 \end{array}\right|$

f) Lösungen (nicht in richtiger Reihenfolge, z.T. gerundet):
$IL=\{(2/-2)\}$ $\quad IL=\{(1{,}83/-1{,}11)\}$ $\quad IL=\{(-10/12)\}$ $\quad IL=\{(-1{,}2/-3{,}4)\}$

2. Gleichsetzungsverfahren

a) Beide Gleichungen des LGS $\left|\begin{matrix} 2x-3y=4 \\ -x+4y=1 \end{matrix}\right|$ werden wie beim graphischen Lösungsverfahren nach y aufgelöst:

$$\left|\begin{matrix} y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3} \\ y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4} \end{matrix}\right|$$

b) Wenn sowohl der rechte Term der ersten Gleichung als auch der rechte Term der zweiten Gleichung gleich y sind, so müssen diese beiden Terme gleichwertig sein, sie werden „gleichgesetzt“:

$$\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$$

c) Diese Gleichung enthält jetzt nur noch eine Variable, nämlich x.
Sie kann durch Umformungen nach x aufgelöst werden:

$$\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4} \quad \left|-\frac{1}{4}x\right. \quad \left|+\frac{4}{3}\right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x-\frac{1}{4}x=\frac{1}{4}+\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{12}x=\frac{19}{12} \quad \left|\cdot\frac{12}{5}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{19}{5}=3{,}8$$

d) Zur Berechnung des y-Wertes wird der gefundene x-Wert in eine der nach y aufgelösten Gleichungen (egal, ob erste oder zweite) eingesetzt:

$$y=\frac{2}{3}\cdot 3{,}8-\frac{4}{3}=1{,}2$$

e) Zum Schluss wird die Lösungsmenge gebildet:

$IL=\{(3{,}8/1{,}2)\}$

f) Übungen: Löse durch Gleichsetzen:

i) $\left|\begin{matrix} 3x+2y=7 \\ y=x-4 \end{matrix}\right|$

ii) $\left|\begin{matrix} x+2y=4 \\ 3x+y=-3 \end{matrix}\right|$

iii) $\left|\begin{matrix} x-3y+1{,}5=0 \\ -x+4y=4 \end{matrix}\right|$

iv) $\left|\begin{matrix} 2x-9y=11 \\ 7y=2x+5 \end{matrix}\right|$

g) Lösungen (nicht in richtiger Reihenfolge):

$IL=\{(3/-1)\}$ $\quad IL=\{(-30{,}5/-8)\}$ $\quad IL=\{(-2/3)\}$ $\quad IL=\{(6/2{,}5)\}$

3. **Einsetzungsverfahren**

$$\left| \begin{array}{r} 2x+3y=19 \\ y=3x-1 \end{array} \right|$$ Hier ist die zweite Gleichung bereits nach y aufgelöst.

a) Man kann jetzt die rechte Seite dieser Gleichung in die erste Gleichung für y einsetzen (unbedingt Klammern um den Term setzen!) und erhält eine neue Gleichung, die nur noch eine Variable, x, enthält:
2x + 3(3x – 1) = 19
(statt y)

b) Diese Gleichung lässt sich nach x auflösen:
$2x+9x-3=19$
$\Leftrightarrow 11x-3=19 \quad |+3$
$\Leftrightarrow 11x=22 \quad |:11$
$\Leftrightarrow x=2$

c) x wird in die zweite Gleichung eingesetzt, um y zu berechnen:
$y=3\cdot 2-1=5$

d) Jetzt kann man die Lösungsmenge angeben: $IL=\{(2/5)\}$

4. Additionsverfahren

a) Die Gleichungen des LGS $\left| \begin{array}{l} 2x-3y=4 \\ x-4y=-1 \end{array} \right|$ werden so geschickt multipliziert, dass durch Addition jeweils eine unbekannte Variable wegfällt (verschwindet), dazu müssen die Zahlen vor x bzw. vor y Gegenzahlen sein, z.B. 2 und -2:

$$\left| \begin{array}{l} 2x-3y=4 \\ x-4y=-1 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2x-3y=4 \\ -2x+8y=2 \end{array} \right| \quad |+$$ Beide Seiten der Gleichungen werden addiert.

$$\Rightarrow 5y=6 \Leftrightarrow y=\frac{6}{5}=1{,}2$$

b) Durch Einsetzen von y in eine der beiden Ausgangsgleichungen (hier wurde die erste gewählt) lässt sich jetzt x berechnen:
$2x-3\cdot 1{,}2=4$
$\Leftrightarrow 2x-3{,}6=4 \quad |+3{,}6$
$\Leftrightarrow 2x=7{,}6 \quad |:2$
$\Leftrightarrow x=3{,}8$

Andere Möglichkeit: Zur Berechnung von x erfolgt eine erneute Addition. Damit y wegfällt, werden beide Gleichungen so multipliziert, dass 12y bzw. -12y entsteht. 12 ist das kgV (**k**leinste **g**emeinsame **V**ielfache) von 3 und 4 :

$$\left| \begin{array}{l} 2x-3y=4 \\ x-4y=-1 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 4 \\ \cdot(-3) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 8x-12y=16 \\ -3x+12y=3 \end{array} \right| \quad |+$$

$$\Rightarrow 5x=19 \Leftrightarrow x=\frac{19}{5}=3{,}8$$

c) Die Lösungsmenge lautet demnach $IL = \{(3{,}8/1{,}2)\}$

d) Übungen: Löse durch Addition!

i) $\left| \begin{matrix} 2x - 3y = 2 \\ -2x + 5y = 6 \end{matrix} \right|$ ii) $\left| \begin{matrix} 6x + 2y = 6 \\ 2x - y = 1 \end{matrix} \right|$ iii) $\left| \begin{matrix} 2x + 5y = 4 \\ 3x - 15y = -39 \end{matrix} \right|$ iv) $\left| \begin{matrix} 3x - 5y = 1 \\ x + y = 3 \end{matrix} \right|$

e) Lösungen (nicht in richtiger Reihenfolge):
$IL = \{(0{,}8/0{,}6)\}$ $IL = \{(7/4)\}$ $IL = \{(-3/2)\}$ $IL = \{(2/1)\}$

5. Lösbarkeit von Linearen Gleichungssystemen

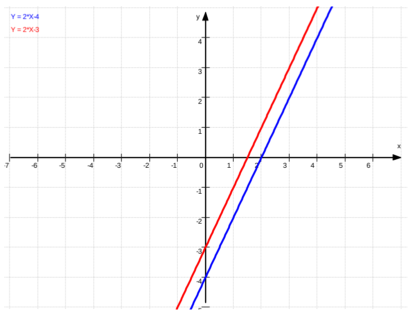
Ein LGS kann genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen haben.

a) Es gibt genau eine Lösung:
Das ist dann der Fall, wenn beim graphischen Lösungsverfahren sich ein Schnittpunkt S(x/y) der beiden Geraden ergibt oder durch das Gleichsetzungs- oder Additionsverfahren je ein Wert für x und y berechnet werden kann.
Bei allen bisherigen Gleichungssystemen war das der Fall.

b) Es gibt keine Lösung:
Das ist dann der Fall, wenn nach Auflösen der Gleichungen nach y sich Gleichungen von Geraden ergeben, die parallel verlaufen, also keinen Schnittpunkt haben.

$$\left| \begin{matrix} 2x - y = 4 \\ -6x + 3y = -9 \end{matrix} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{matrix} y = 2x - 4 \\ y = 2x - 3 \end{matrix} \right|$$



Die Steigung beider Geraden ist gleich, der y-Achsenabschnitt verschieden. Es gibt keine gemeinsamen Punkte.
$\Rightarrow IL = \{\ \}$

c) Es gibt unendlich viele Lösungen:
Das ist dann der Fall, wenn nach Auflösen der Gleichungen nach y sich identische Gleichungen von Geraden ergeben, d.h. beide Geraden liegen aufeinander, haben also unendlich viele Punkte gemeinsam.

$$\left| \begin{matrix} 2x - y = 4 \\ -6x + 3y = -12 \end{matrix} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{matrix} y = 2x - 4 \\ y = 2x - 4 \end{matrix} \right|$$

Steigung und y-Achsenabschnitt sind gleich. Die Lösungsmenge besteht aus allen Punkten (x/y) mit der Bedingung $y = 2x - 4$.
$\Rightarrow IL = \{(x/y) \mid y = 2x - 4\}$

d) Übungen:
Entscheide, ob das Gleichungssystem keine, eine oder unendlich viele Lösungen hat!
(Kontrolle: jeder Fall kommt genau einmal vor!)

i) $\left| \begin{matrix} x + y = 7 \\ 2x = 11 - 2y \end{matrix} \right|$ ii) $\left| \begin{matrix} 2x + y = -1 \\ x + y + 4 = 0 \end{matrix} \right|$ iii) $\left| \begin{matrix} 2x - 3y + 9 = 0 \\ 6y = 18 + 4x \end{matrix} \right|$