

Lösen linearer Gleichungssysteme

Ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten Größen x und y , wie z.B.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -x + 4y = 1 \end{cases} \text{ heißt lineares Gleichungssystem (LGS).}$$

Wenn es genau eine Lösung gibt (s. unten), so besteht sie nicht aus einer Zahl, sondern aus einem Zahlenpaar (x und y). Schreibweise: $IL = \{(x | y)\}$, Reihenfolge beachten!

1. Graphisches Lösungsverfahren (mit GTR)

- a) Zuerst werden beide Gleichungen des LGS schrittweise nach y aufgelöst:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \end{cases}$$

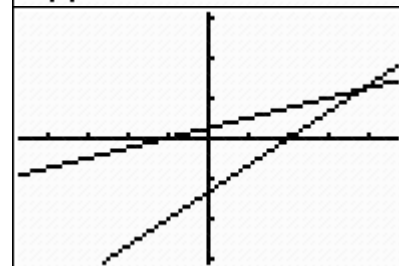
Es ergeben sich zwei lineare Funktionen, die je eine Gerade als Graph haben.

- b) Beide Funktionen werden im Y=Editor in den GTR eingegeben.

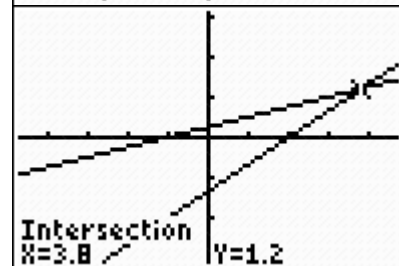
```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=2/3*X-4/3
Y2=X/4+1/4
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
Y7=
    
```

- c) Mit GRAPH lassen sich beide Geraden graphisch darstellen. Eventuell muss mit ZOOM oder WINDOW ein geeignetes Graphikfenster erzeugt werden, so dass der Schnittpunkt beider Geraden deutlich sichtbar ist.



- d) Mit CALC / INTERSECT lässt sich nun der Schnittpunkt der beiden Geraden ablesen:
 $S(3,8/1,2)$
 Die Lösungsmenge des LGS lautet daher:
 $IL = \{(3,8/1,2)\}$



- e) Übungen: Löse graphisch!

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x + 2y = -8 \end{cases}$$

i) $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} 2x + y = -8 \\ x + 3y = 26 \end{cases}$ Hier muss ein geeignetes Fenster gesucht werden!

iii) $\begin{cases} 7x - 11y = 25 \\ 9x + 14y = 1 \end{cases}$

- f) Lösungen (nicht in richtiger Reihenfolge, z.T. gerundet):

$$IL = \{(2/-2)\} \quad IL = \{(1,83/-1,11)\} \quad IL = \{(-10/12)\} \quad IL = \{(-1,2/-3,4)\}$$

2. Gleichsetzungsverfahren

- a) Beide Gleichungen des LGS $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -x + 4y = 1 \end{cases}$ werden wie beim graphischen

Lösungsverfahren nach y aufgelöst:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \end{cases}$$

- b) Wenn sowohl der rechte Term der ersten Gleichung als auch der rechte Term der zweiten Gleichung gleich y sind, so müssen diese beiden Terme gleichwertig sein, sie werden „gleichgesetzt“:

$$\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

- c) Diese Gleichung enthält jetzt nur noch eine Variable, nämlich x. Sie kann durch Umformungen nach x aufgelöst werden:

$$\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \quad \left| -\frac{1}{4}x \right| \quad \left| +\frac{4}{3} \right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}x = \frac{1}{4} + \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{12}x = \frac{19}{12} \quad \left| \cdot \frac{12}{5} \right|$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{19}{5} = 3,8$$

- d) Zur Berechnung des y-Wertes wird der gefundene x-Wert in eine der nach y aufgelösten Gleichungen (egal, ob erste oder zweite) eingesetzt:

$$y = \frac{2}{3} \cdot 3,8 - \frac{4}{3} = 1,2$$

- e) Zum Schluss wird die Lösungsmenge gebildet:

$$IL = \{(3,8/1,2)\}$$

- f) Übungen: Löse durch Gleichsetzen:

i) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ y = x - 4 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + y = -3 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x - 3y + 1,5 = 0 \\ -x + 4y = 4 \end{cases}$

iv) $\begin{cases} 2x - 9y = 11 \\ 7y = 2x + 5 \end{cases}$

- g) Lösungen (nicht in richtiger Reihenfolge):

$$IL = \{(3/-1)\} \quad IL = \{(-30,5/-8)\} \quad IL = \{(-2/3)\} \quad IL = \{(6/2,5)\}$$

3. Einsetzungsverfahren

$$\left| \begin{array}{l} 2x + 3y = 19 \\ y = 3x - 1 \end{array} \right| \text{ Hier ist die zweite Gleichung bereits nach } y \text{ aufgelöst.}$$

- a) Man kann jetzt die rechte Seite dieser Gleichung in die erste Gleichung für y einsetzen (unbedingt Klammern um den Term setzen!) und erhält eine neue Gleichung, die nur noch eine Variable, x , enthält:

$$2x + 3(3x - 1) = 19$$

(statt y)

- b) Diese Gleichung lässt sich nach x auflösen:

$$2x + 9x - 3 = 19$$

$$\Leftrightarrow 11x - 3 = 19 \quad | +3$$

$$\Leftrightarrow 11x = 22 \quad | :11$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

- c) x wird in die zweite Gleichung eingesetzt, um y zu berechnen:

$$y = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$

- d) Jetzt kann man die Lösungsmenge angeben: $IL = \{(2/5)\}$

4. Additionsverfahren

- a) Die Gleichungen des LGS $\left| \begin{array}{l} 2x - 3y = 4 \\ x - 4y = -1 \end{array} \right|$ werden so geschickt multipliziert, dass durch

Addition jeweils eine unbekannte Variable wegfällt (verschwindet), dazu müssen die Zahlen vor x bzw. vor y Gegenzahlen sein, z.B. 2 und -2:

$$\left| \begin{array}{l} 2x - 3y = 4 \\ x - 4y = -1 \end{array} \right| \cdot (-2)$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2x - 3y = 4 \\ -2x + 8y = 2 \end{array} \right| \quad | + \quad \text{Beide Seiten der Gleichungen werden addiert.}$$

$$\Rightarrow 5y = 6 \Leftrightarrow y = \frac{6}{5} = 1,2$$

- b) Durch Einsetzen von y in eine der beiden Ausgangsgleichungen (hier wurde die erste gewählt) lässt sich jetzt x berechnen:

$$2x - 3 \cdot 1,2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3,6 = 4 \quad | +3,6$$

$$\Leftrightarrow 2x = 7,6 \quad | :2$$

$$\Leftrightarrow x = 3,8$$

Andere Möglichkeit: Zur Berechnung von x erfolgt eine erneute Addition. Damit y wegfällt, werden beide Gleichungen so multipliziert, dass $12y$ bzw. $-12y$ entsteht. 12 ist das kgV (kleinste gemeinsame Vielfache) von 3 und 4 :

$$\left| \begin{array}{l} 2x - 3y = 4 \\ x - 4y = -1 \end{array} \right| \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 8x - 12y = 16 \\ -3x + 12y = 3 \end{array} \right| \quad | +$$

$$\Rightarrow 5x = 19 \Leftrightarrow x = \frac{19}{5} = 3,8$$

c) Die Lösungsmenge lautet demnach $IL = \{(3,8/1,2)\}$

d) Übungen: Löse durch Addition!

$$\text{i) } \begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -2x + 5y = 6 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} 6x + 2y = 6 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \quad \text{iii) } \begin{cases} 2x + 5y = 4 \\ 3x - 15y = -39 \end{cases} \quad \text{iv) } \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

e) Lösungen (nicht in richtiger Reihenfolge):

$$IL = \{(0,8/0,6)\} \quad IL = \{(7/4)\} \quad IL = \{(-3/2)\} \quad IL = \{(2/1)\}$$

5. Lösbarkeit von Linearen Gleichungssystemen

Ein LGS kann genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen haben.

a) Es gibt genau eine Lösung:

Das ist dann der Fall, wenn beim graphischen Lösungsverfahren sich ein Schnittpunkt $S(x/y)$ der beiden Geraden ergibt oder durch das Gleichsetzungs- oder Additionsverfahren je ein Wert für x und y berechnet werden kann.

Bei allen bisherigen Gleichungssystemen war das der Fall.

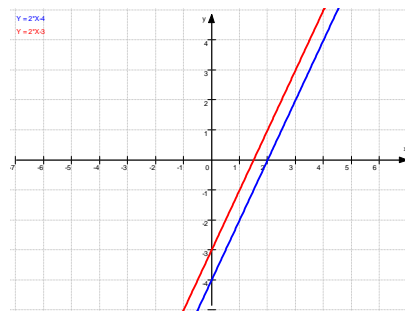
b) Es gibt keine Lösung:

Das ist dann der Fall, wenn nach Auflösen der Gleichungen nach y sich Gleichungen von Geraden ergeben, die parallel verlaufen, also keinen Schnittpunkt haben.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -6x + 3y = -9 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

Die Steigung beider Geraden ist gleich, der y -Achsenabschnitt verschieden. Es gibt keine gemeinsamen Punkte.

$$\Rightarrow IL = \{ \}$$



c) Es gibt unendlich viele Lösungen:

Das ist dann der Fall, wenn nach Auflösen der Gleichungen nach y sich identische Gleichungen von Geraden ergeben, d.h. beide Geraden liegen aufeinander, haben also unendlich viele Punkte gemeinsam.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -6x + 3y = -12 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

Steigung und y -Achsenabschnitt sind gleich. Die Lösungsmenge besteht aus allen Punkten (x/y) mit der Bedingung $y = 2x - 4$.

$$\Rightarrow IL = \{(x/y) \mid y = 2x - 4\}$$

d) Übungen:

Entscheide, ob das Gleichungssystem keine, eine oder unendlich viele Lösungen hat! (Kontrolle: jeder Fall kommt genau einmal vor!)

$$\text{i) } \begin{cases} x + y = 7 \\ 2x = 11 - 2y \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + y + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{iii) } \begin{cases} 2x - 3y + 9 = 0 \\ 6y = 18 + 4x \end{cases}$$