Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene

Drei Fälle sind zu unterscheiden:

1. Die Gerade schneidet die Ebene in einem Punkt,
2. die Gerade verläuft (echt) parallel zu der Ebene (g und E haben **keinen** gemeinsamen Punkt),
3. die Gerade liegt in der Ebene (g und E haben **unendlich viele** gemeinsame Punkte).

Man setzt die Terme der Geraden- und der Ebenengleichung gleich und prüft, ob das entstehende Gleichungssystem genau eine Lösung hat (Fall 1), gar keine Lösung hat (Fall 2) oder unendlich viele Lösungen hat (Fall 3).

Gegeben sind die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und die Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

E – g_1

Um einen möglichen Schnittpunkt zu berechnen, setzt man die rechten Seiten der Gleichungen gleich:

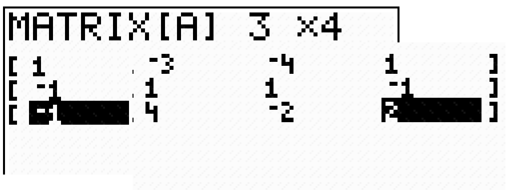
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Ordnen: } r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - t_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Übergang zu den Koordinatengleichungen:

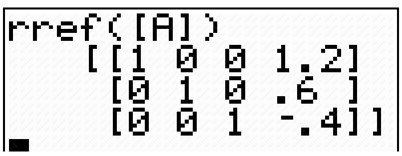
$r - 3s - 4t_1 = 1$
$-r + s + t_1 = -1$
$-r + 4s - 2t_1 = 2$

Koeffiziententabelle:

r	s	t_1	
1	-3	-4	1
-1	1	1	-1
-1	4	-2	2



Als Matrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. rref(A) ergibt $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1{,}2 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}4 \end{pmatrix}$.



Damit ist das LGS eindeutig lösbar, Lösungen sind r = 1,2 ; s = 0,6 und $t_1 = -0{,}4$.

Jetzt setzt man $t_1 = -0{,}4$ in g (oder r und s in E) ein und erhält den Schnittpunkt:

$\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0{,}4 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}4 \\ 0{,}4 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$, also S (1,4 | 0,4 | 0,2).

E – g_2

Bei g_2 ist gegenüber dem 1. Beispiel der Richtungsvektor geändert: $r\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}-t_2\begin{pmatrix}4\\-2\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

Übergang zu den Koordinatengleichungen:

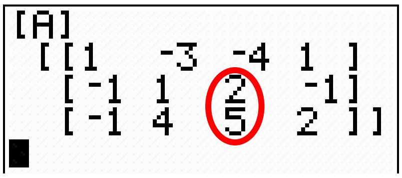
$r - 3s - 4\,t_2 = 1$

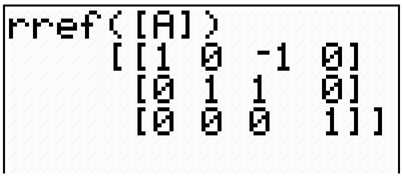
$-r + s + 2t_2 = -1$

$-r + 4s + 5t_2 = 2$

Koeffiziententabelle:

r	s	t_2	
1	-3	-4	1
-1	1	2	-1
-1	4	5	2





Dieses Gleichungssystem hat keine Lösung, denn die Bedingung aus der 3. Zeile: $0r + 0s + 0t_2 = 1$ ist nicht erfüllbar, **also sind g_2 und E parallel zueinander.**

E – g_3

Bei g_3 ist gegenüber dem 2. Beispiel der Stützvektor geändert: $r\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}-t_3\begin{pmatrix}4\\-2\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

Übergang zu den Koordinatengleichungen:

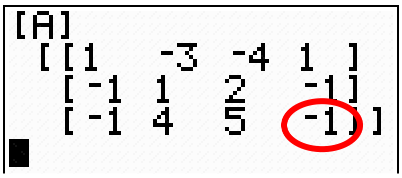
$r - 3s - 4\,t_3 = 1$

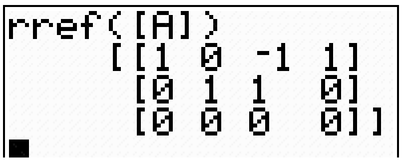
$-r + s + 2t_3 = -1$

$-r + 4s + 5t_3 = -1$

Koeffiziententabelle:

r	s	t_3	
1	-3	-4	1
-1	1	2	-1
-1	4	5	-1





Dieses Gleichungssystem hat **unendlich viele** Lösungen:
Aus der 1. Zeile folgt: $r - t_3 = 1$, also ist $r = t_3+1$,
aus der 2. Zeile folgt: $s + t_3 = 0$, also ist $s = -t_3$,
die 3. Zeile bedeutet $0r + 0s + 0t_3 = 0$, eine wahre Aussage.
Man gelangt zu einem beliebigen Punkt der Geraden, den man mit einem bestimmten t_3 erreicht, z.B. $t_3 = 2$, auch über die Ebene, dort muss dann entsprechend den Folgerungen aus der 1. und 2. Zeile $r = 2 + 1 = 3$ und $s = -2$ sein.
Also liegt g_3 in der Ebene E.