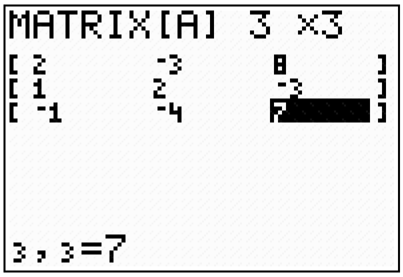
Sich schneidende oder windschiefe Geraden

Gegeben: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Offenbar sind die Richtungsvektoren nicht kollinear, so dass g und h sich entweder schneiden oder windschief zueinander sind.

Um einen möglichen Schnittpunkt zu berechnen, setzt man die rechten Seiten der Geradengleichungen gleich: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Ordnen: $r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Übergang zu den Koordinatengleichungen:

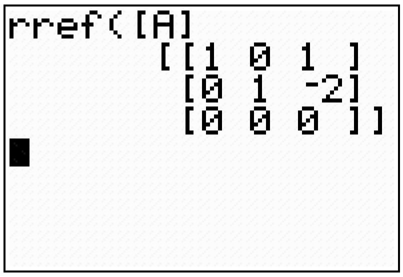
$2r - 3s = 8$
$r + 2s = -3$
$-r - 4s = 7$



Dieses lineare Gleichungssystem (LGS) ist überbestimmt, für die 2 Variablen r und s sind 3 Gleichungen vorhanden.
Koeffiziententabelle:

r	s	
2	-3	8
1	2	-3
-1	-4	7

Als Matrix: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$. rref(A) ergibt $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.



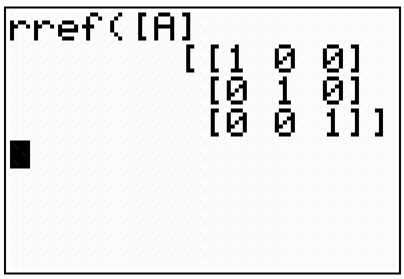
In der 3. Zeile steht 0 r + 0 s = 0, also eine wahre Aussage.
Damit ist das LGS eindeutig lösbar, Lösungen sind r = 1 und s = -2.

Jetzt setzt man r bei g (oder s bei h) ein und erhält den Schnittpunkt:

$\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, also S (5 | 3 | 0).

Wählt man statt h die Gerade h*: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, bei der die dritte Koordinate des Stützvektors geändert wurde, ergibt sich $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. rref(A) ergibt jetzt $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.



Die dritte Gleichung lautet 0 r + 0 s = 1, sie ist nicht erfüllbar, also hat das LGS keine Lösung. die Geraden g und h* sind windschief.