Lagebeziehungen von zwei Geraden

Parallele oder identische Geraden

Zuerst sollte geprüft werden, ob die beiden Geraden parallel oder sogar identisch sind.

Beispiel:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Prüfen, ob die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind (dann sind sie *linear abhängig* oder *kollinear*):

Gibt es ein einheitliches a, so dass gilt: $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Einzelne Koordinatengleichungen lösen: $\begin{array}{l} 4 = a \cdot 2 \;\Rightarrow a = 2 \\ 2 = a \cdot 1 \;\Rightarrow a = 2 \\ 4 = a \cdot 2 \;\Rightarrow a = 2 \end{array}$

Da es ein einheitliches a gibt, sind die beiden Geraden **parallel**.

Sind sie sogar identisch? Dann müsste ein beliebiger Punkt von g auch auf h liegen, z.B. der Stützpunkt.

Punktprobe: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \;\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 3 = 4 + 4s \\ -2 = 6 + 2s \\ 4 = -4 + 4s \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 4s = -1 \\ 2s = -8 \\ 4s = 8 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} s = -\frac{1}{4} \\ s = -4 \\ s = 2 \end{array} \right|$

Da der Stützpunkt von g nicht auf h liegt, sind die Geraden **echt parallel**.

Sich schneidende oder windschiefe Geraden

Gegeben: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Offenbar sind die Richtungsvektoren nicht kollinear, so dass g und h sich entweder schneiden oder windschief zueinander sind.

Um einen möglichen Schnittpunkt zu berechnen, setzt man die rechten Seiten der Geradengleichungen gleich: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Ordnen: $r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

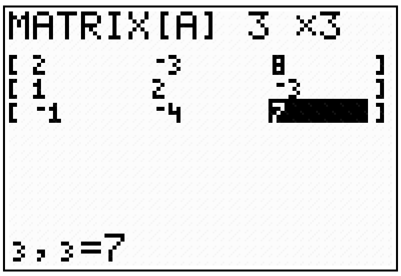
Übergang zu den Koordinatengleichungen:

$$\begin{array}{r} 2r - 3s = 8 \\ r + 2s = -3 \\ -r - 4s = 7 \end{array}$$

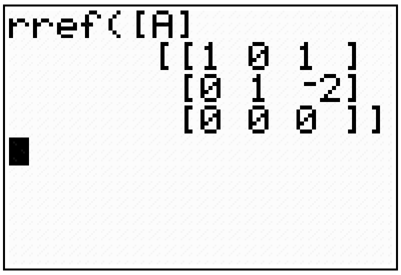
Dieses lineare Gleichungssystem (LGS) ist überbestimmt, für die 2 Variablen r und s sind 3 Gleichungen vorhanden.

Koeffiziententabelle:

r	s	
2	-3	8
1	2	-3
-1	-4	7



Als Matrix: $A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & 7 \end{array}\right)$. rref(A) ergibt $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.



In der 3. Zeile steht 0 r + 0 s = 0, also eine wahre Aussage.
Damit ist das LGS eindeutig lösbar, Lösungen sind r = 1 und s = -2.

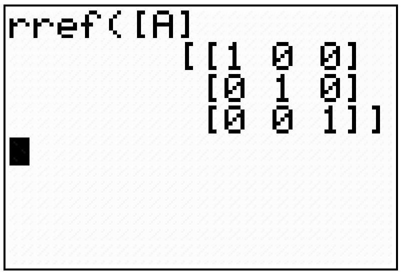
Jetzt setzt man r bei g (oder s bei h) ein und erhält den **Schnittpunkt**:

$\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, also **S (5 | 3 | 0)**.

Wählt man statt h die Gerade h*: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, bei der die dritte Koordinate des Stützvektors

geändert wurde, ergibt sich $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

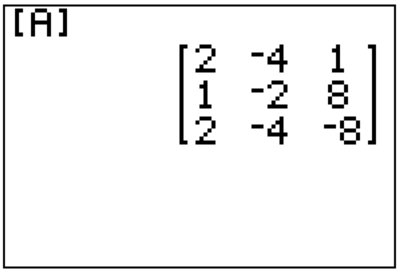
$A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & 4 \end{array}\right)$. rref(A) ergibt jetzt $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

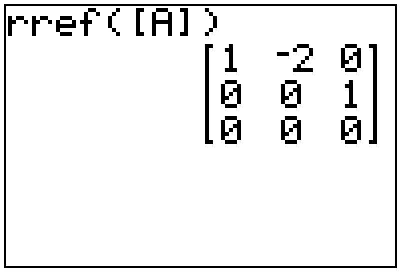


Die dritte Gleichung lautet 0 r + 0 s = 1, sie ist nicht erfüllbar, also hat das LGS keine Lösung. die Geraden g und h* sind **windschief**.

Parallele oder identische Geraden bei Gleichsetzen der Gleichungsterme

Manchmal vergisst man zu prüfen, ob die Richtungsvektoren linear abhängig sind, und setzt die Gleichungsterme sofort gleich. In einem solchen Fall (Beispiel wie ganz oben) liefert der GTR bei Eingabe des zugehörigen LGS $\left|\begin{array}{c} 2t - 4s = 1 \\ t - 2s = 8 \\ 2t - 4s = -8 \end{array}\right|$:

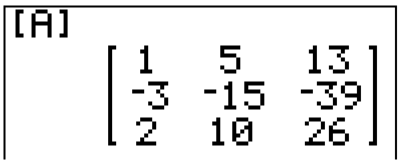


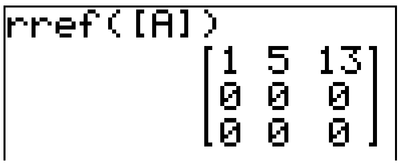


Während die dritte Zeile im Gegensatz zur Lösung bei windschiefen Geraden mit 0r + 0s = 0 eine wahre Aussage darstellt, zeigt jetzt **die zweite Zeile** mit der unerfüllbaren Bedingung 0r + 0s = 1 an, dass das LGS keine Lösung hat. Die Geraden haben keinen gemeinsamen Punkt, sind aber **parallel**.

Die folgenden beiden Geraden sind **identisch**:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 17 \\ -38 \\ 24 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \\ -10 \end{pmatrix}$





Die zweite und dritte Zeile sind erfüllbar, aus der ersten ergibt sich s + 5t = 13, also ist s = 13 - 5t.
Beispiel: Für t = 1 führt h zum Punkt P (12 | -23 | 14).
Setzt man stattdessen s = 13 – 5 · 1, also s = 8, in g ein, gelangt man ebenfalls zum Punkt P (12 | -23 | 14).