

Gleichungen sind **Aussageformen**. Erst wenn für die Variable, meist x , eine Zahl eingesetzt ist, wird aus der Aussageform eine **Aussage**, die **wahr oder falsch** ist. Gesucht ist also diejenige Zahl, die die Aussageform (Gleichung, z.B. $x = 3$) in eine wahre Aussage ($3 = 3$) überführt. Damit ist 3 ein Element der Lösungsmenge: $L = \{3\}$.

Beim Lösen von Gleichungen wird die Ausgangsgleichung durch Umformungen, bei denen sich die Lösungsmenge nicht verändert (Äquivalenzumformungen), so stark vereinfacht, dass schließlich x allein auf einer Seite steht.

Äquivalenzumformungen:

- auf beiden Seiten dieselbe Zahl addieren oder subtrahieren,
- beide Seiten mit derselben Zahl multiplizieren oder durch dieselbe Zahl (außer 0) dividieren.
(Statt „Zahl“ darf man auch mit x rechnen, da x eine Variable ist, die eine Zahl aufnimmt.)

Beispiel 1:

$$\begin{array}{ll}
 8 - 2(x+1) = 4 + 4(x-3) & /\text{Klammern ausmultiplizieren} \\
 8 - 2x - 2 = 4 + 4x - 12 & /\text{jede Seite für sich so weit wie möglich zusammenfassen} \\
 6 - 2x = -8 + 4x & /\text{so umformen, dass } x \text{ nur noch auf einer Seite vorkommt, also } +2x \text{ (oder } -4x) \\
 6 = -8 + 6x & /\text{Summanden auf der Seite mit } x \text{ beseitigen, also: } +8 \\
 14 = 6x & /\text{Gleichung durch den Faktor vor } x \text{ dividieren, also :6} \\
 \frac{14}{6} = x & /\text{Ergebnis, wenn möglich, kürzen} \\
 \frac{7}{3} = x & /\text{Lösungsmenge angeben} \\
 L = \left\{ \frac{7}{3} \right\} &
 \end{array}$$

Beispiel 2:

$$\begin{array}{l}
 x + 3 + x + 7 = 2(x+6) \quad / \text{zusammenfassen} \\
 2x + 10 = 2x + 12 \quad / -2x \\
 10 = 12
 \end{array}$$

Das ist eine **falsche Aussage**,
die Lösungsmenge ist leer: $L = \{ \}$

Beispiel 3:

$$\begin{array}{ll}
 2(x+1) + 3x + 1 = 1 + 5x + 2 & /\text{Klammer ausmultiplizieren} \\
 2x + 2 + 3x + 1 = 3 + 5x & / \text{zusammenfassen} \\
 5x + 3 = 5x + 3 & / -5x \\
 3 = 3 &
 \end{array}$$

x fällt beim Umformen heraus, die Gleichung ist zu einer **wahren Aussage** geworden. Für x darf man jede Zahl in die Ausgangsgleichung einsetzen: $L = \mathbb{Q}$.

Sachaufgaben

Beispiel: Ein Rechteck hat einen Umfang von 40cm. Es ist dreimal so lang wie breit. Bestimme Seitenlängen und Flächeninhalt.

Variablen festlegen: **Seitenlänge a, Seitenbreite b.**

Die Einheiten werden in der Rechnung weggelassen und erst im Antwortsatz wieder genannt.

Benötigte Formeln: Umfang $u = 2(a+b)$; Flächeninhalt $A = a \cdot b$

Der Umfang beträgt 40cm, also gilt die Gleichung: **$2(a+b)=40$**

Das Rechteck ist dreimal so lang wie breit, also muss man die Breite b verdreifachen, damit sie genauso groß wie a ist: **$b \cdot 3 = a$** . Da in der Gleichung oben a und b enthalten sind, ersetzen wir dort die Variable a durch $3b$ und erhalten eine Gleichung mit nur einer Variablen b :

$$2(3b + b) = 40$$

$$2(4b) = 40$$

$$8b = 40$$

$$b = 5$$

Da **$b \cdot 3 = a$** gilt, ist $a = 15$.

Damit ergibt sich $A = 15 \cdot 5 = 75$

Antwort: Das Rechteck hat die Seitenlängen 5cm und 15cm. Sein Flächeninhalt ist 75cm².