

Lineare Gleichungssysteme lösen
Analysis / Analytische Geometrie

ab Kl. 11

1. Das zu lösende Gleichungssystem (hier: 3. Ordnung) muss in dieser Form vorliegen:

$$3x + 6y - 2z = -4$$

$$3x + 2y + z = 0$$

$$1,5x + 5y - 5z = -9$$

2. Die Koeffizienten werden in eine Matrix (hier: [A] 3x4) eingegeben:
Tastenfolge: **MATRIX** / **EDIT** / **1** / **3** / **→** / **4** / **ENTER**

```
MATRIX[A] 3 x4
[0 0 0 -
[0 0 0 -
[0 0 0 -
1,1=0
```

Die Eingabe der Koeffizienten erfolgt zeilenweise mit ENTER

```
MATRIX[A] 3 x4
[0 6 -2 -
[3 2 1 -
[1.5 5 -5 -
1,1=3
```

3. Im HOME-Display wird mit dem Befehl RREF([A]) die Matrix A auf vollständige Diagonalgestalt gebracht (mit dem Befehl REF erzeugt man die halbe Diagonalgestalt).
Tastenfolge:
MATRIX / **MATH** / **B** / **MATRIX** / **1** / **)** / **ENTER**

```
rref([A])
[[1 0 0 -1]
[0 1 0 5]
[0 0 1 2]]
```

Die Lösungen $x = -1$; $y = 0,5$; $z = 2$ können jetzt abgelesen werden.

4. Auch unterbestimmte Gleichungssysteme lassen sich lösen, z.B.

$$x + 2y + 3z = 3$$

$$2x + 3y + 4z = 3$$

```
MATRIX[A] 2 x4
[0 2 3 -
[2 3 4 -
1,1=1

rref([A])
[[1 0 -1 -3]
[0 1 2 3]]
```

Aus den Gleichungen

$$x - z = -3$$

$$y + 2z = 3$$

ergeben sich die Lösungen für x und y in Abhängigkeit von z:

$$x = -3 + z$$

$$y = 3 - 2z$$

GTR-Tipps

Taylor-Entwicklung

Allgemeine Formel (vgl. Wikipedia)

$$T(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \dots$$

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{9}{x^2 + 3}$; Entwicklung des Taylorpolynoms vierten Grades

Ableitungen so weit wie möglich (und zumutbar) von Hand bestimmen:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{18x}{(x^2 + 3)^2}; f''(x) = \frac{54x^2 - 54}{(x^2 + 3)^4}$$

Funktion und Ableitungen bei Y1 bis Y3 im GTR eingeben:

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1 X/2+9/(X^2+3
\Y2 1/2-18X/(X^2+
3)^2
\Y3 (54X^2-54)/(X
^2+3)^4
\Y4 nDeriv(Y3,X,
X)
    
```

Bei Y4 und Y5 Ableitungen vom GTR berechnen lassen:
(Y3 und Y4 über VARS – Y-VARS wählen)

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y3 (54X^2-54)/(X
^2+3)^4
\Y4 nDeriv(Y3,X,
X)
\Y5 nDeriv(Y4,X,
X)
\Y6 =
    
```

Über TABLE die Funktionswerte ablesen (Zeichnung - GRAPH - dauert wegen des rekursiven Aufrufs von Y4 und Y5 sehr lange)

X	Y1	Y2
0	3	.5
1	2,75	-.625

X=0

Werte in Taylorformel eingeben (für Entwicklungspunkt $x = 0$):

$$T(x) = 3 + 0,5x + \frac{-2}{2}x^2 + \frac{0}{6}x^3 + \frac{8}{24}x^4 = 3 + \frac{1}{2}x - x^2 + \frac{1}{3}x^4$$

X	Y3	Y4
0	-.2	0
1	0	1,6875

Y4=

Selbstverständlich können auch für jeden anderen Punkt (z.B. $x = 1$) die Werte ausgelesen werden, allerdings müssten noch die Potenzen aufgelöst werden:

$$T(x) = 2,75 - 0,625(x-1) + 0 + \frac{1,6875}{6}(x-1)^3 - \frac{3,375}{24}(x-1)^4 = \dots$$

Derive liefert (Analysis – Taylorreihe...)

$$T(x) = \frac{189}{64} + \frac{25}{32}x - \frac{27}{16}x^2 + \frac{27}{32}x^3 - \frac{9}{64}x^4$$

X	Y4	Y5
0	0	0
1	1,6875	-3,375

Y5=

 Kombinatorik und Bernoulliketten

- Permutation von n Elementen

$n!$

z.B. $5!$ $5 / \text{MATH} / \text{PRB} / !$

- Permutation von n Elementen zur k-ten Klasse mit Berücksichtigung der Reihenfolge

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

z.B. $\frac{5!}{(5-3)!}$ $5 \text{ nPr } 3 \rightarrow 5 / \text{MATH} / \text{PRB} / \text{nPr} / 3$

- Permutation von n Elementen zur k-ten Klasse ohne Berücksichtigung der

Reihenfolge $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

z.B. $\binom{5}{3}$ $5 \text{ nCr } 3 \rightarrow 5 / \text{MATH} / \text{PRB} / \text{nCr} / 3$

- Bernoulli-Kette der Länge n (n Versuche mit Trefferwahrscheinlichkeit p)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = B_{n,p}(k)$$

GTR: `binompdf(n,p,k)`

z.B. $n = 5, p = 0,75, k = 3$

`binompdf(5,0.75,3) → DISTR / 0 / 5,0.75,3) / ENTER`

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

GTR: `binomcdf(n,p,k)` (Kumulierte Wahrscheinlichkeiten)

z.B. $n = 5, p = 0,75, k = 3$

`binomcdf(5,0.75,3) → DISTR / A / 5,0.75,3) / ENTER`

Binomialverteilung

Beispiel:

Es soll die Binomialverteilung einer Bernoulli-Kette der Länge 8 mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von 0,75 dargestellt werden.

1. Im Listeneditor werden in L₁ die Anzahl der möglichen Treffer 0 .. 8 eingetragen.

2. Als Spaltenüberschrift von L₂ wird eingegeben:

"binompdf(8,0.75, L₁)

Tastenfolge:

" / **DISTR** / 0 / 8,0.75, L₁) ENTER

(Das – nicht unbedingt notwendige – Voranstellen des Anführungszeichen " bewirkt, dass man den Spaltenterm später wieder editieren kann, z.B. bei Änderung der Parameter; ansonsten werden nur die aktuellen Listenwerte angezeigt.)

L1	#	L3	2
0	1.5E-5	-----	
1	3.7E-4		
2	.00385		
3	.02307		
4	.08652		
5	.20764		
6	.31146		

L2 ="binompdf(8,0

3. In L₃ können nun die kumulierten Wahrscheinlichkeiten eingegeben werden:

"binomcdf(8,0.75, L₁)

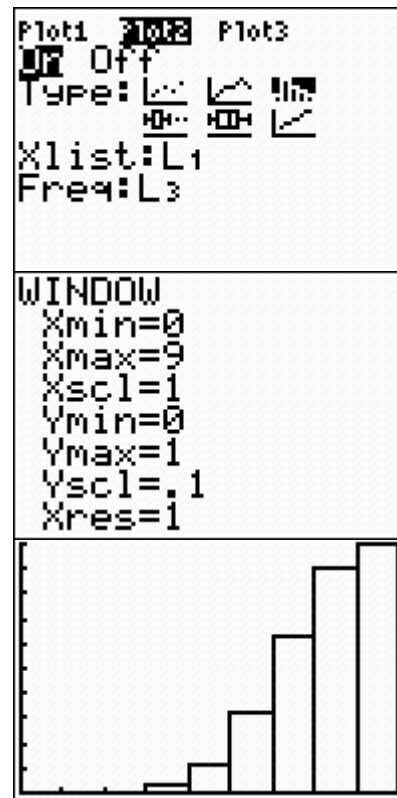
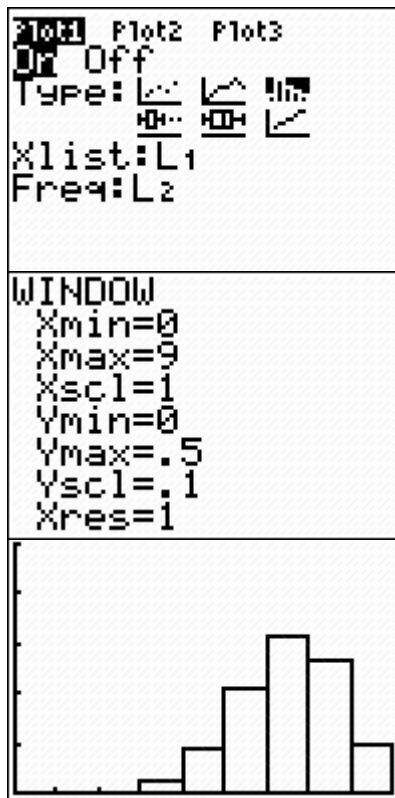
Tastenfolge:

" / **DISTR** / A / 8,0.75, L₁) ENTER

L1	L2	#	#	3
0	1.5E-5	1.5E-5		
1	3.7E-4	3.8E-4		
2	.00385	.00423		
3	.02307	.0273		
4	.08652	.11382		
5	.20764	.32146		
6	.31146	.63292		

L3 ="binomcdf(8,0

4. Die Verteilungen können in Histogrammen dargestellt werden, wobei die WINDOW-Einstellungen beachtet werden müssen:



5. Die Darstellung der Binomialverteilung in Listen hat – außer der Möglichkeit der graphischen Darstellung – noch weitere Vorteile bei der Berechnung von Summenwahrscheinlichkeiten, z.B.

$$P(3 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 2)$$

Tastenfolge für den sum-Befehl:

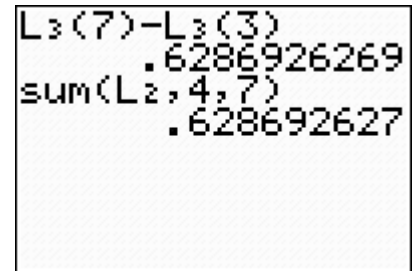
LIST / MATH / 5

Beachten:

Die in der Abbildung auftretenden Parameterwerte

sind Listenindizes, also: $L_1(1) = 0, \dots, L_1(9) = 8$

(Das erste Element der Liste L_1 ist 0 usw.)



The image shows a TI-84 Plus calculator screen with the following text:
L3(7)-L3(3)
.6286926269
sum(L2,4,7)
.628692627

GTR-Tipps

Hypergeometrische Verteilung mit dem TI-83 als Funktion

Formel aus Formelsammlung S. 42:
$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Beispiel Lotto (6 aus 49):

Wahrscheinlichkeit, 4 Richtige zu haben

N=49

M=6

n=6

k=4

$$P(X = 4) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = 0,0009686$$

```
(6 nCr 4)*(43 nCr
r 2)/(49 nCr 6)
9.686197244E-4
6 nCr 4*43 nCr 2
/49 nCr 6
9.686197244E-4
```

(Klammern sind überflüssig; nCr bei MATH → PRB → 3)

Liste für alle Gewinnwahrscheinlichkeiten ($0 \leq k \leq 6$) LS Stochastik Seite 88 Aufgabe 4

Hypergeometrische Verteilung als Funktion:

$$P(X = k) = \frac{\binom{6}{k} \cdot \binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=6 nCr X*43 n
Cr (6-X)/49 nCr
6
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
```

2nd → Table:

X	Y1	
0	.43596	
1	.41902	
2	.13238	
3	.01765	
4	9.686197244E-4	
5	1.8E-5	
6	7.2E-8	
Y1=9.68619724E-4		

Vergleich Binomialverteilung – Hypergeometrische Verteilung

Beispiel:

Aus einer Urne mit 8 roten und 5 weißen Kugeln werden 3 Kugeln gezogen, und zwar:

a) mit Zurücklegen

b) ohne Zurücklegen

Die Zufallsvariable X beinhaltet die Anzahl der gezogenen roten Kugeln.

a) Binomialverteilung $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$$n = 3, p = \frac{8}{13} \Rightarrow P(X = k) = \binom{3}{k} \cdot \left(\frac{8}{13}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{13}\right)^{3-k}$$

b) Hypergeometrische Verteilung $P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

$$N = 13, n = 3, M = 8 \Rightarrow P(X = k) = \frac{\binom{8}{k} \cdot \binom{5}{3-k}}{\binom{13}{3}}$$

Eingabe in den Listeneditor:

L₁: 0, 1, 2, 3 (Mögliche Anzahl der roten Kugeln)

L₂ (Kopfzeile): 13 nCr L₁ * (8/13)^{L₁} * (5/13)^{3-L₁} (Binomialverteilung)

oder einfacher: binomcdf(3, 8/13, L₁)

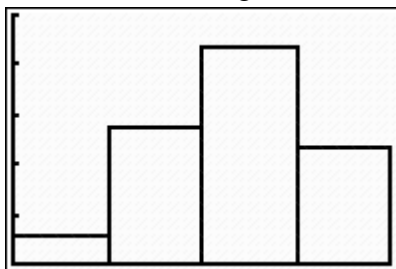
L₃ (Kopfzeile): 8 nCr L₁ * 5 nCr (3-L₁) / 13 nCr 3 (Hypergeometrische Verteilung)

Die Listenwerte können unmittelbar verglichen, die Verteilungen durch Aktivierung von PLOT1 bzw. PLOT2 angezeigt werden.

L1	L2	#	#	3
0	.0569			.03497
1	.2731			.27972
2	.43696			.48951
3	.23305			.1958

L3 = "8 nCr L1 * 5 nCr (3-L1) / 13 nCr 3"				

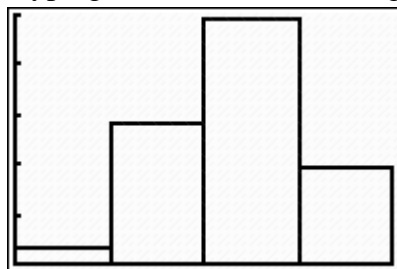
Binomialverteilung



L1	L2	#	#	3
0	.0569			.03497
1	.2731			.27972
2	.43696			.48951
3	.23305			.1958

L3 = "8 nCr L1 * 5 nCr (3-L1) / 13 nCr 3"				

Hypergeometrische Verteilung



WINDOW
Xmin=0
Xmax=4
Xscl=1
Ymin=0
Ymax=.5
Yscl=.1
Xres=1

Wenn gilt $N \geq 10n$, lässt sich die hypergeometrische Verteilung durch die Binomialverteilung approximieren, d.h. das Urnenmodell „ohne Zurücklegen“ wird durch das Modell „mit Zurücklegen“ ersetzt.

GTR-Tipps

Beim Hypothesentest den Ablehnungsbereich mit dem GTR bestimmen.

Beispiel:

Abitur gk 2007 Block 2B Aufgabe 2b:

$H_0 : p_0 \leq 0,4$; $n = 100$; $\alpha = 5\%$; Einseitiger (rechtsseitiger) Test; Gegenhypothese: $p_1 = 0,5$

Folgende Funktion eingeben (Y=):
(beachte: X-1; beim linksseitigen Test bis X)

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=1-binomcdf(1
00,0.4,X-1)
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
    
```

Einstellungen für Tabelle (TBLSET):

```

TABLE SETUP
TblStart=45
ΔTbl=1
Indent:  Ask
Depend:  Ask
    
```

ergibt folgende Tabelle (TABLE):

X	Y1
45	.1709
46	.13109
47	.09298
48	.06379
49	.04230
50	.0271
51	.01676

Y1=.042301419302

Ablesen lässt sich daraus, dass der Ablehnungsbereich bei 49 beginnt (Wahrscheinlichkeit unter 5%; Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art: 4,23%).

```

binomcdf(100,0.5
,48)
.3821767129
    
```

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art (bei $p_1 = 0,5$) beträgt 38,22%

Sigmaregeln ergeben mit $\mu = 40$, $\sigma = 4,9$ und $k = 1,64$ (Formelsammlung S. 43) die Grenze 48,03, also den Annahmehbereich [0..48] und den Ablehnungsbereich [49..100].

```

100*0.4          40
√(100*0.4*0.6)  4.898979486
40+1.64*Ans     48.03432636
    
```