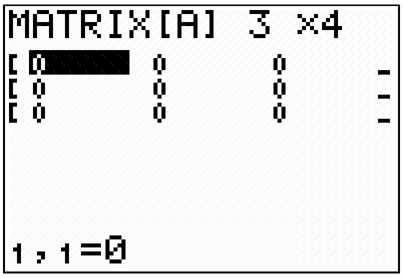
Lineare Gleichungssysteme lösen
Analysis / Analytische Geometrie ab Kl. 11

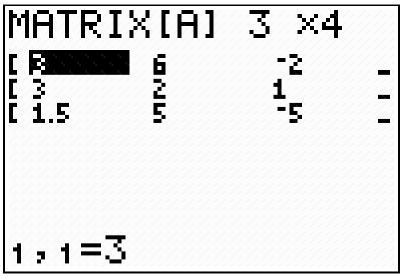
1. Das zu lösende Gleichungssystem (hier: 3. Ordnung) muss in dieser Form vorliegen:

$$3x+6y-2z=-4$$
$$3x+2y+z=0$$
$$1{,}5x+5y-5z=-9$$

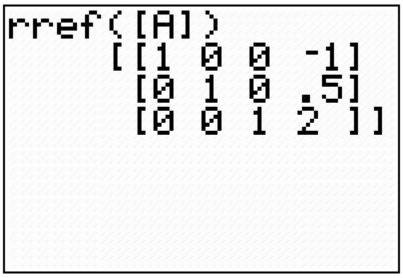
2. Die Koeffizienten werden in eine Matrix (hier: [A] 3x4) eingegeben:
   Tastenfolge: **MATRIX** / **EDIT** / **1** / **3** / **→** / **4** / **ENTER**



   Die Eingabe der Koeffizienten erfolgt zeilenweise mit ENTER



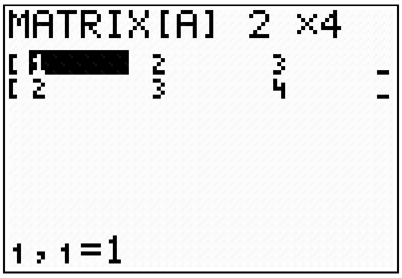
3. Im HOME-Display wird mit dem Befehl RREF([A]) die Matrix A auf vollständige Diagonalgestalt gebracht (mit dem Befehl REF erzeugt man die halbe Diagonalgestalt).
   Tastenfolge:
   MATRIX / **MATH** / **B** / **MATRIX** / **1** / **)** / **ENTER**

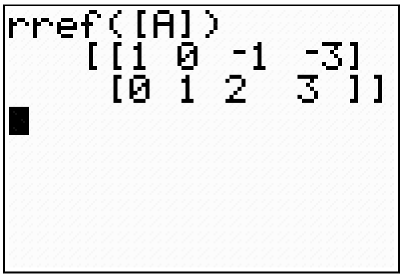


   Die Lösungen $x=-1$; $y=0{,}5$; $z=2$ können jetzt abgelesen werden.

4. Auch unterbestimmte Gleichungssysteme lassen sich lösen, z.B.

$$x+2y+3z=3$$
$$2x+3y+4z=3$$





   Aus den Gleichungen

$$x-z=-3$$
$$y+2z=3$$

   ergeben sich die Lösungen für x und y in Abhängigkeit von z:

$$x=-3+z$$
$$y=3-2z$$

GTR-Tipps

Taylor-Entwicklung

Allgemeine Formel (vgl. Wikipedia)

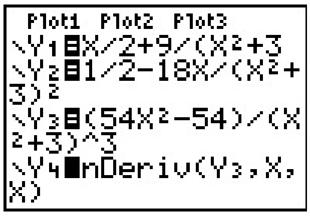
$$T(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + ...$$

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{9}{x^2+3}$; Entwicklung des Taylorpolynoms vierten Grades

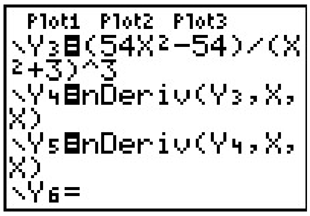
Ableitungen so weit wie möglich (und zumutbar) von Hand bestimmen:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{18x}{(x^2+3)^2};\quad f''(x) = \frac{54x^2-54}{(x^2+3)^4}$$

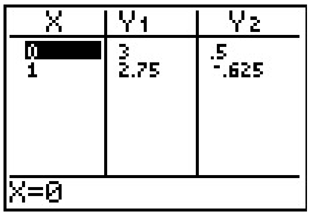
Funktion und Ableitungen bei Y1 bis Y3 im GTR eingeben:



Bei Y4 und Y5 Ableitungen vom GTR berechnen lassen:
(Y3 und Y4 über VARS – Y-VARS wählen)

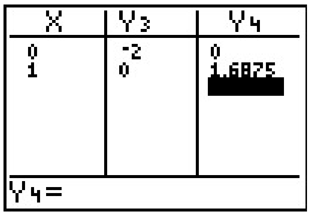


Über TABLE die Funktionswerte ablesen (Zeichnung - GRAPH - dauert wegen des rekursiven Aufrufs von Y4 und Y5 sehr lange)



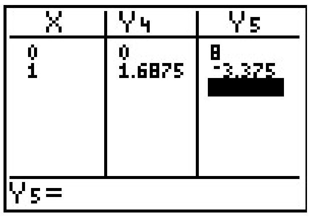
Werte in Taylorformel eingeben (für Entwicklungspunkt $x = 0$):

$$T(x) = 3 + 0{,}5x + \frac{-2}{2}x^2 + \frac{0}{6}x^3 + \frac{8}{24}x^4 = 3 + \frac{1}{2}x - x^2 + \frac{1}{3}x^4$$



Selbstverständlich können auch für jeden anderen Punkt (z.B. $x = 1$) die Werte ausgelesen werden, allerdings müssten noch die Potenzen aufgelöst werden:

$$T(x) = 2{,}75 - 0{,}625(x-1) + 0 + \frac{1{,}6875}{6}(x-1)^3 - \frac{3{,}375}{24}(x-1)^4 = ...$$



Derive liefert (Analysis – Taylorreihe...)

$$T(x) = \frac{189}{64} + \frac{25}{32}x - \frac{27}{16}x^2 + \frac{27}{32}x^3 - \frac{9}{64}x^4$$

Kombinatorik und Bernoulliketten

- Permutation von n Elementen
  n!
  z.B. 5! 5 / MATH / PRB / !

- Permutation von n Elementen zur k-ten Klasse mit Berücksichtigung der Reihenfolge
  $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$
  z.B. $\frac{5!}{(5-3)!}$ 5 nPr 3 → 5 / MATH / PRB / nPr / 3

- Permutation von n Elementen zur k-ten Klasse ohne Berücksichtigung der Reihenfolge $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$
  z.B. $\binom{5}{3}$ 5 nCr 3 → 5 / MATH / PRB / nCr / 3

- Bernoulli-Kette der Länge n (n Versuche mit Trefferwahrscheinlichkeit p)
  $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}=B_{n;p}(k)$
  GTR: binompdf(n,p,k)
  z.B. $n=5,\ p=0{,}75,\ k=3$
  binompdf(5,0.75,3) → **DISTR** / 0 / 5,0.75,3) / ENTER

  $P(X\le k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}$
  GTR: binomcdf(n,p,k) (Kumulierte Wahrscheinlichkeiten)
  z.B. $n=5,\ p=0{,}75,\ k=3$
  binomcdf(5,0.75,3) → **DISTR** / A / 5,0.75,3) / ENTER

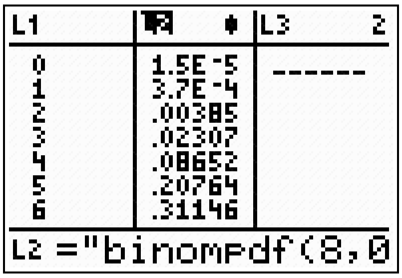
Binomialverteilung

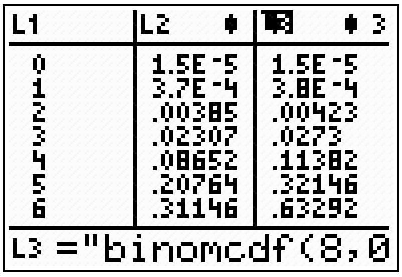
Beispiel:
Es soll die Binomialverteilung einer Bernoulli-Kette der Länge 8 mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von 0,75 dargestellt werden.

1. Im Listeneditor werden in L_1 die Anzahl der möglichen Treffer 0 .. 8 eingetragen.

2. Als Spaltenüberschrift von L_2 wird eingegeben:
   "binompdf(8,0.75, L_1)
   Tastenfolge:
   " / DISTR / 0 / 8,0.75, L_1) ENTER

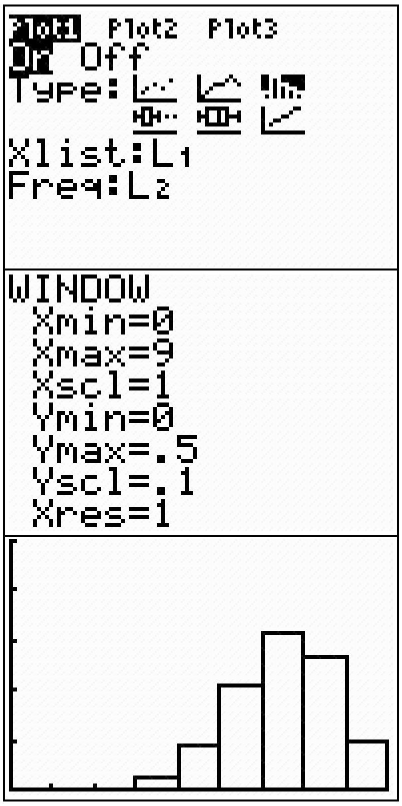
   (Das – nicht unbedingt notwendige – Voranstellen des Anführungszeichen " bewirkt, dass man den Spaltenterm später wieder editieren kann, z.B. bei Änderung der Parameter; ansonsten werden nur die aktuellen Listenwerte angezeigt.)

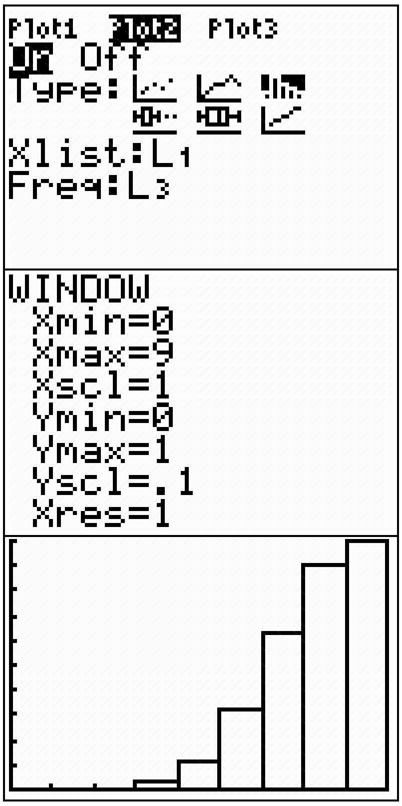




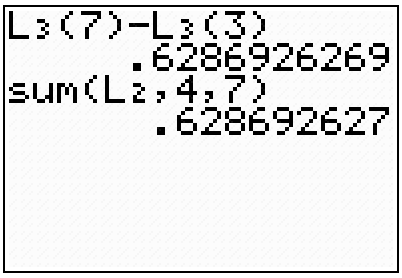
3. In L_3 können nun die kumulierten Wahrscheinlichkeiten eingegeben werden:
   "binomcdf(8,0.75, L_1)
   Tastenfolge:
   " / DISTR / A / 8,0.75, L_1) ENTER

4. Die Verteilungen können in Histogrammen dargestellt werden, wobei die WINDOW-Einstellungen beachtet werden müssen:





5. Die Darstellung der Binomialverteilung in Listen hat – außer der Möglichkeit der graphischen Darstellung – noch weitere Vorteile bei der Berechnung von Summenwahrscheinlichkeiten, z.B.
   $P(3 \le X \le 6) = P(X \le 6) - P(X \le 2)$

   Tastenfolge für den sum-Befehl:
   LIST / MATH / 5

   Beachten:
   Die in der Abbildung auftretenden Parameterwerte sind Listenindizes, also: $L_1(1) = 0,\ \dots\ , L_1(9) = 8$
   (Das erste Element der Liste L_1 ist 0 usw.)

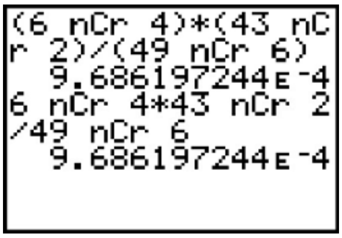
GTR-Tipps

Hypergeometrische Verteilung mit dem TI-83 als Funktion

Formel aus Formelsammlung S. 42: $P(X=k)=\dfrac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Beispiel Lotto (6 aus 49):
Wahrscheinlichkeit, 4 Richtige zu haben
N=49
M=6
n=6
k=4

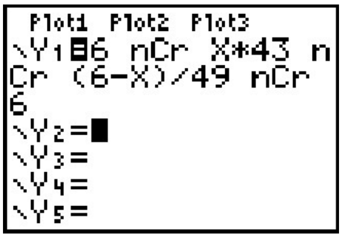
$$P(X=4)=\frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}=0{,}0009686$$



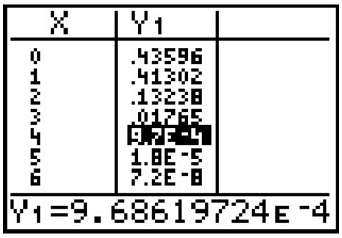
(Klammern sind überflüssig; nCr bei MATH → PRB → 3)

Liste für alle Gewinnwahrscheinlichkeiten ($0\le k\le 6$) LS Stochastik Seite 88 Aufgabe 4
Hypergeometrische Verteilung als Funktion:

$$P(X=k)=\frac{\binom{6}{k}\cdot\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$



2nd → Table:



Vergleich Binomialverteilung – Hypergeometrische Verteilung

Beispiel:
Aus einer Urne mit 8 roten und 5 weißen Kugeln werden 3 Kugeln gezogen, und zwar:
a) mit Zurücklegen
b) ohne Zurücklegen
Die Zufallsvariable X beinhaltet die Anzahl der gezogenen roten Kugeln.

a) Binomialverteilung $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$

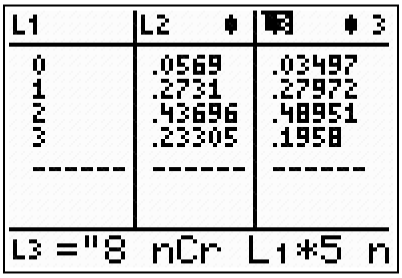
$$n=3,\ \ p=\tfrac{8}{13}\Rightarrow P(X=k)=\binom{3}{k}\cdot\left(\frac{8}{13}\right)^k\cdot\left(\frac{5}{13}\right)^{3-k}$$

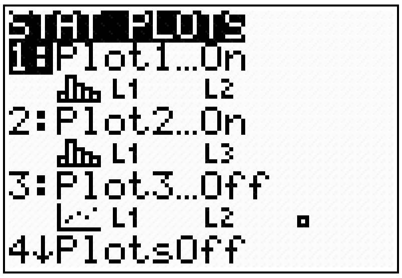
b) Hypergeometrische Verteilung $P(X=k)=\dfrac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

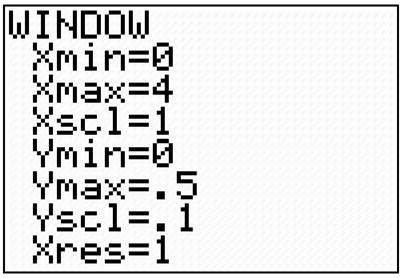
$$N=13,\ \ n=3,\ \ M=8\Rightarrow P(X=k)=\frac{\binom{8}{k}\cdot\binom{5}{3-k}}{\binom{13}{3}}$$

Eingabe in den Listeneditor:
L_1: 0, 1, 2, 3 (Mögliche Anzahl der roten Kugeln)
L_2 (Kopfzeile): 13 nCr L_1 * (8/13)^L_1 * (5/13)^L_1 (Binomialverteilung)
oder einfacher: binomcdf(3 , 8/15 , L_1)
L_3 (Kopfzeile): 8 nCr L_1 * 5 nCr (3-L_1) / 13 nCr 3 (Hypergeometrische Verteilung)

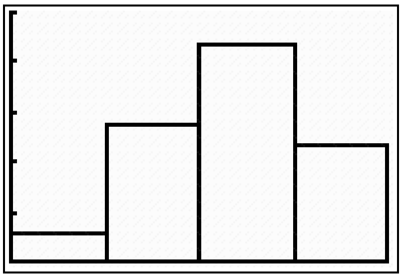
Die Listenwerte können unmittelbar verglichen, die Verteilungen durch Aktivierung von PLOT1 bzw. PLOT2 angezeigt werden.



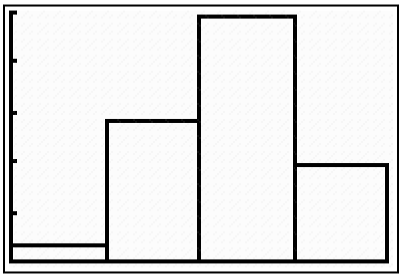




Binomialverteilung



Hypergeometrische Verteilung



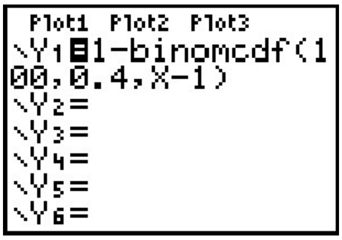
Wenn gilt $N\geq 10n$, lässt sich die hypergeometrische Verteilung durch die Binomialverteilung approximieren, d.h. das Urnenmodell „ohne Zurücklegen“ wird durch das Modell „mit Zurücklegen“ ersetzt.

GTR-Tipps

Beim Hypothesentest den Ablehnungsbereich mit dem GTR bestimmen.

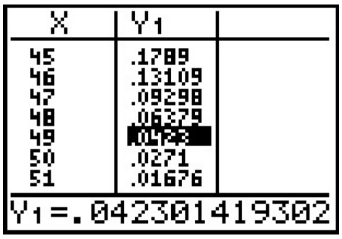
Beispiel:
Abitur gk 2007 Block 2B Aufgabe 2b:
$H_0 : p_0 \leq 0{,}4$; $n = 100$; $\alpha = 5\%$; Einseitiger (rechtsseitiger) Test; Gegenhypothese: $p_1 = 0{,}5$

Folgende Funktion eingeben (Y=):
(beachte: X-1; beim linksseitigen Test bis X)



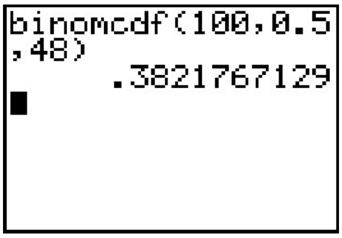
Einstellungen für Tabelle (TBLSET):

ergibt folgende Tabelle (TABLE):



Ablesen lässt sich daraus, dass der Ablehnungsbereich bei 49 beginnt (Wahrscheinlichkeit unter 5%; Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art: 4,23%).

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art (bei $p_1 = 0{,}5$) beträgt 38,22%



Sigmaregeln ergeben mit $\mu = 40$, $\sigma = 4{,}9$ und $k = 1{,}64$ (Formelsammlung S. 43) die Grenze 48,03, also den Annahmebereich $[0..48]$ und den Ablehnungsbereich $[49..100]$.