GTR-Tipps

Lage zweier Ebenen mit GTR

$E_1 : \vec{x} = \vec{a} + k \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{v}$; $E_2 : \vec{x} = \vec{b} + r \cdot \vec{m} + s \cdot \vec{n}$

Gleichsetzen ergibt: $\vec{a} + k \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{v} = \vec{b} + r \cdot \vec{m} + s \cdot \vec{n}$

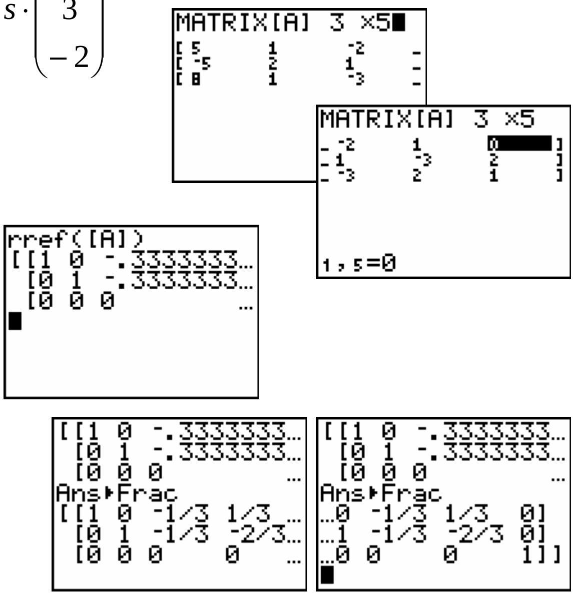
Ordnen: $k \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{v} - r \cdot \vec{m} - s \cdot \vec{n} = \vec{b} - \vec{a}$

LGS aufstellen, 3x5-Matrix hat...

i. ... keine Lösung: E_1 und E_2 sind echt parallel.
ii. ... unendlich viele Lösungen, ein Parameter frei wählbar: Schnittgerade
iii. ... unendlich viele Lösungen, Nullzeile (zwei Parameter frei wählbar): $E_1 = E_2$

<u>zu i:</u>

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \; E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$



umgeformte Matrix:

k	l	r	s	
5	1	-2	1	0
-5	2	1	-3	2
8	1	-3	2	1

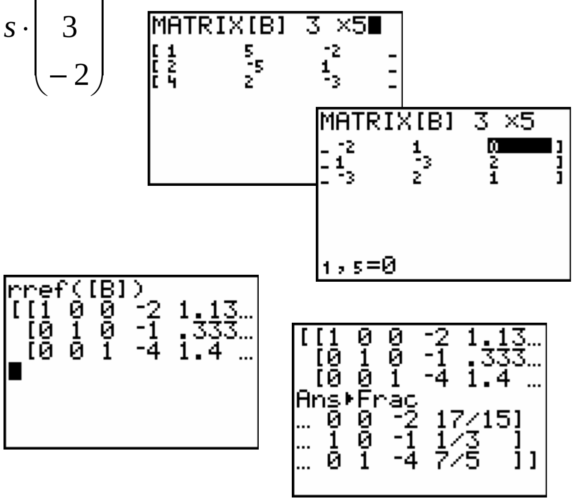
LGS in 3x5-Matrix A, rref(A)
und ▸Frac ergibt Koeffizientenschema.

k	l	r	s	
1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
0	0	0	0	1

Aus der 3. Zeile folgt, dass das LGS keine Lösung hat:
$0 \cdot k + 0 \cdot l + 0 \cdot r + 0 \cdot s = 1$ ist nicht lösbar,
E_1 und E_2 sind echt parallel.

<u>zu ii:</u>

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}; \; E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$



umgeformte Matrix:

k	l	r	s	
1	5	-2	1	0
2	-5	1	-3	2
4	2	-3	2	1

LGS in 3x5-Matrix B, rref(B) und ▸Frac ergibt

k	l	r	s	
1	0	0	-2	$\frac{17}{15}$
0	1	0	-1	$\frac{1}{3}$
0	0	1	-4	$\frac{7}{5}$

Aus der 3. Zeile folgt $r-4s=\frac{7}{5}$ bzw. $r=\frac{7}{5}+4s$

r in E_2 einsetzen ergibt Schnittgerade:

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+(\frac{7}{5}+4s)\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{matrix}x_1=1+\frac{14}{5}+8s-s\\ x_2=2-\frac{7}{5}-4s+3s\\ x_3=3+\frac{21}{5}+12s-2s\end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix}x_1=\frac{19}{5}+7s\\ x_2=\frac{3}{5}-s\\ x_3=\frac{36}{5}+10s\end{matrix}\ .$$

Es ergibt sich die Schnittgerade $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}\frac{19}{5}\\ \frac{3}{5}\\ \frac{36}{5}\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}7\\-1\\10\end{pmatrix}$

<u>zu iii:</u>

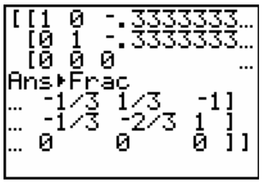
$$E_1:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+l\cdot\begin{pmatrix}5\\-5\\2\end{pmatrix};\ E_2:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$$

umgeformte Matrix:

k	l	r	s	
1	5	-2	1	-4
2	-5	1	-3	7
4	2	-3	2	-7

LGS in 3x5-Matrix B, rref(C) und ▸Frac ergibt

k	l	r	s	
1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1
0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
0	0	0	0	0



Sämtliche Positionen in der 3. Zeile sind Null. Damit sind zwei Parameter frei wählbar, beim Gleichsetzen entsteht somit eine „Ebene, in der beide Ebenen liegen“, also ist $E_1=E_2$.

Hn/Bo 10/2008