

Bestimmung von Vertrauensintervallen bei unbekanntem Wahrscheinlichkeiten

(Näherungslösung; Bezeichnungen nach Formelsammlung Seite 43)

- n : Umfang der Stichprobe
- h_n : Relative Häufigkeit eines Merkmals
- σ_n : Standardabweichung der Stichprobe ($\sigma_n = \sqrt{n \cdot h_n \cdot (1 - h_n)}$)
- γ : Sicherheit; Vertrauenszahl ($\gamma = 1 - \alpha$)
- k ergibt sich aus der Vertrauenszahl γ (FS Seite 43 oben; $k \sigma$ -Intervalle)
- ε : Genauigkeit der Schätzgröße ($\varepsilon = k \cdot \frac{\sigma_n}{n}$)

Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich das Vertrauensintervall $[h_n - \varepsilon \dots h_n + \varepsilon]$

Beispiel (nach LS 11/12 Gesamtband Oberstufe Seite 365):

Die Partei CFP gibt eine Umfrage in Auftrag. Eine repräsentative Stichprobe von 1000 Wählern ergibt 370 Wähler der CFP. Bestimmen Sie das 95%-Vertrauensintervall für den unbekanntem Anteil p der CFP-Wähler in der Bevölkerung.

Näherungslösung:

$n = 1000$, gespeichert in N

$h_n = \frac{370}{1000} = 0,37$, gespeichert in H

$\sigma_n = \sqrt{1000 \cdot 0,37 \cdot (1 - 0,37)} = 15,2676$, gespeichert in S

$\gamma = 0,95 \Rightarrow k = 1,96$

Damit ergibt sich $\varepsilon = k \cdot \frac{\sigma_n}{n} = 1,96 \cdot \frac{15,27}{1000} = 0,02992$, gespeichert in E

und das Vertrauensintervall

$[0,37 - 0,02992 \dots 0,37 + 0,02992] = [0,34008 \dots 0,39992]$

```
1000→N
370/N→H
√(N*H*(1-H))→S
1.96*S/N→E
```

```
H-E
H+E
```

Schneller geht's mit dem Test
STAT→TESTS→A:1-propZInt...

```
EDIT CALC TESTS
1:1-PropZInt...
2:2-PropZInt...
3:ZInterval...
4:TInterval...
5:2-SampZInt...
6:2-SampTInt...
7:1-PropZInt...
8:2-PropZInt...
```

```
1-PropZInt
x:370
n:1000
C-Level:0.95
Calculate
```

```
1-PropZInt
(.34008,.39992)
p=.37
n=1000
```

Interpretation im Sachzusammenhang:

Die Partei CFP kann bei der Wahl mit einer Sicherheit von 95 Prozent ein Ergebnis zwischen 34,01% und 39,99% der Wählerstimmen erwarten (eine Spanne von fast 6%)

Die **exakte Lösung** verwendet $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ statt σ_n . Das Vertrauensintervall ergibt sich aus der Lösung der Ungleichung $(h_n - p)^2 \leq k^2 \cdot \frac{\sigma^2}{n^2}$ bzw. $(h_n - p)^2 \leq k^2 \cdot \frac{p \cdot (1-p)}{n}$ und würde das Intervall [0,34063...0,40037] ergeben (Lösung mit GTR; p durch x ersetzen).

```

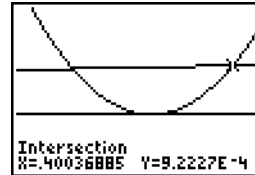
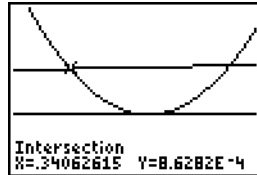
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=(0.37-X)^2
Y2=1.96^2*X(1-X)
Z1000
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=

```

```

WINDOW
Xmin=.32
Xmax=.41
Ymin=-.001
Ymax=.002
Xscl=1
Yscl=1
Xres=

```



Soll der Stichprobenumfang für ein vorgegebenes Vertrauensintervall bestimmt werden, muss bedacht werden, dass ε die halbe Länge des Intervalls angibt (Formelsammlung S. 43; Konfidenzintervalle).

Beispiel: Zum Vertrauensniveau $\gamma = 0,95$ und einer gewünschten Länge 0,04 (4%) des Vertrauensintervalls soll die Anzahl der zu befragenden Personen bestimmt werden:

$$k = 1,96, \varepsilon = \frac{0,04}{2} = 0,02 \Rightarrow n > \left(\frac{k}{2\varepsilon} \right)^2 = \left(\frac{1,96}{0,04} \right)^2 = 2401$$

```

(1.96/0.04)^2
2401

```

Es müssen mindestens 2402 Personen befragt werden, um das Wahlergebnis mit einer Genauigkeit von 4% vorherzusagen (bei einer Sicherheit von 95%).